УДК [517.95]
УКПП
№ держ.реєстрації **0118U005210**
Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
(ЧНУ)
58000, м.Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
e-mail: diffeq@chnu.edu.ua

З А Т В Е Р Д Ж У Ю
Проректор з наукової роботи,
д-р тех. наук, професор
_____ Андрій САМІЛА
21 грудня 2022 р.

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО–ДОСЛІДНУ РОБОТУ
ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЗАДАЧІ ТЕРМОЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ
(остаточний)

Науковий керівник НДР
д-р ф.-м. наук, проф. _____ Владислав ЛІТОВЧЕНКО
21 грудня 2022 р.

2022

Рукопис закінчено 21 грудня 2022 р.

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР,
завідувач кафедри,
д-р фіз.-мат. наук, проф.
В.А. Літовченко
(реферат, вступ;
розділи 1, 2; висновки)

Виконавці:

Професор кафедри,
д-р фіз.-мат. наук, проф.
І.Д. Пукальський
(розділи 3–4)

Доцент кафедри,
канд. фіз.-мат. наук, доц.
Г.М. Перун
(п. 6.3, пп. 7.3.1, 7.3.3)

Доцент кафедри,
канд. фіз.-мат. наук, доц.
О.М. Ленюк
(п. 6.2)

Доцент кафедри,
канд. фіз.-мат. наук, доц.
В.М. Лучко
(п. 7.1, 7.2)

Асистент кафедри,
канд. фіз.-мат. наук, доц.
І.П. Лусте
(розділ 5, п. 4.4, 4.5)

Доцент кафедри,
канд. фіз.-мат. наук, доц.
Л.М. Мельничук
(п. 6.1, пп. 7.3.1, 7.3.2)

Асистент кафедри,
д-р філософ. наук, ас.
Б.О. Яшан
(розділ 3, п. 4.1, 4.2)

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР 149 с., джерел 128.

БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА, ГІБРИДНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ, ГІПЕРБОЛІЧНІ ТА ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ, ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ, ЗАДАЧА ЗІ СКІСНОЮ ПОХІДНОЮ, ЗАДАЧА КОШІ, ЗОНАЛЬНО-НЕОДНОРІДНЕ СЕРЕДОВИЩЕ, КЛАСИ ЄДИНОСТІ ТА КОРЕКТНОСТІ, КРАЙОВА ЗАДАЧА, ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ТЕРМОЕЛЕКТРИКИ, ПРОСТОРИ ГЕЛЬДЕРА, ГЕЛЬФАНДА І ШИЛОВА, ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, СИПАРАТНІ СИСТЕМИ, СТІЙКІ СИМЕТРІЧНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ, УТВОРЮЮЧА ФУНКЦІЯ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ, ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК, ФУНКЦІЯ ГРІНА.

Об'єкт дослідження – крайові задачі з імпульсним впливом для параболічних рівнянь з виродженням, задача Коші для псевдодиференціальних рівнянь з однорідними точково негладкими символами та еволюційні задачі термоелектропружності й оптимізації.

Мета дослідження – знаходження умов коректної розв'язності задач для псевдодиференціальних, параболічних і гіперболічних рівнянь, задач термоелектропружності, та їх застосування до задач оптимального керування, теорії ймовірностей, теплопружності й математичного аналізу.

Предмет дослідження – методи побудови та дослідження властивостей фундаментального розв'язку зазначених рівнянь, класи коректності та єдиності задачі Коші, методи розв'язування крайових задач з імпульсним впливом і виродженими коефіцієнтами, методи побудови оптимального керування для таких задач, різні режими керування, загальна природа стійких симетричних випадкових процесів Леві.

Основні результати:

- узагальнено класичне рівняння фрактальної дифузії, для якого:

  - з'ясовано, що його фундаментальний розв'язок задачі Коші є щільністю розподілу ймовірностей для сили локальної взаємодії рухомих об'єктів у відповідному гравітаційному полі Рісса;

  - встановлено коректну розв'язність задачі Коші в класі необмежених, розривних з інтегровною особливістю початкових функцій;

  - знайдено інтегральну форму класичного розв'язку цієї задачі та досліджено властивості його гладкості й поведінку на нескінченності;

- на інтервалах стабільної інтенсивності коефіцієнта флуктуації рівняння встановлено аналог принципу максимуму;

- наведено приклад задачі Коші з початковою функцією – ядром Рісса дробового інтегрування, та встановлено її природничий зміст;

- вперше встановлено загальну природу сійких симетричних випадкових процесів Леві в контексті задачі про локальний вплив рухомих об'єктів в гравітаційних полях Рісса;

- означено класи параболічних систем рівнянь із частинними похідними, що характеризують багатство класу Шиловим систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами та класу $\{\vec{p}, \vec{h}\}$-параболічних систем. Обгрунтовано їх параболічну стійкість щодо зміни коефіцієнтів;

- установлено загальні оцінки фундаментального розв'язку задачі Коші та його похідних для систем з цих класів не використовуючи поняття роду системи;

- досліджено основні властивості функції Гріна для гіперболічних за Шиловим систем у просторах типу S, встановлено існування та єдиність у кожному такому просторі класичного розв'язку задачі Коші, розширено клас єдиності S_0' Гельфанда і Шилова для таких систем до просторів $S_0^{\beta'}$, $\beta > 1$, і доведено, що ці розширення є класами коректності. Одержані результати проілюстровано на прикладі рівняння коливання необмеженої струни;

- для параболічних рівнянь другого порядку з імпульсною умовою за часовою змінною та зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння за часовою та просторовими змінними в гельдерових просторах зі степеневою вагою, степінь якої залежить від порядку особливостей коефіцієнтів:

  - знайдено умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші, та задачі Діріхле;

  - встановлено коректну розв'язність задачі зі скісною похідною;

  - встановлено існування, єдиність та оцінки розв'язків односторонньої крайової задачі;

- досліджено багатоточкові задачі Коші, Діріхле та задачу зі скісною похідною для параболічного рівняння, коефіцієнти якого вироджуються довільним чином за часовою змінною у фіксований момент часу та просторовими змінними на деякій множині точок, при цьому:

- встановлено існування та оцінку розв'язку багатоточкової задачі Коші для параболічного рівняння, коефіцієнти якого мають довільні степеневі особливості за часовою і просторовими змінними;

- встановлена коректна розв'язність першої крайової задачі для параболічного рівняння, коефіцієнти якого мають степеневі особливості довільного порядку за часовою та просторовими змінними;

- знайдено умови існування та єдиності розв'язку задачі зі скісною похідною для виродженого параболічного рівняння зі степеневими особливостями в коефіцієнтах рівняння та крайової умови;

- для задачі оптимального керування системою, яка описується задачею зі скісною похідною та інтегральною умовою за часовою змінною, для виродженого параболічного рівняння другого порядку встановлено існування та знайдено оцінки її розв'язку, а також, сформульовано необхідні та достатні умови існування розв'язку цієї задачі та аналогічної задачі для $2b$-параболічних рівнянь;
- узагальнено підхід до опису термоелектричного поля, який дозволив вперше отримати аналітичні розв'язки оберненої задачі термоелектрики у вигляді, зручному для керування вихровими термоелектричними струмами у зонально-неоднорідному середовищі;
- розроблено схему побудови утворюючої функції термоелектричного поля для двовимірного гіротропного середовища, яка спрощує знаходження розподілів температури, потенціалу і струму, необхідних для створення гіротропних термоелементів. Наведено приклади використання утворюючої функції для знаходження вихрових струмів у плоскому гіротропному середовищі;
- для параболічного рівняння загальної структури з необмеженими коефіцієнтами та операторами Бесселя, що діють за частиною компонент просторової змінної побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші та досліджено його основні властивості;
- за допомогою гібридних інтегральних перетворень типу Ейлера, Бесселя розроблено методику розв'язування сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку на кусково-

однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами;

- здійснено коректну постановку і розв'язано стохастичну m-точкову за часом задачу Коші для параболічного рівняння вищого порядку із збуреннями типу "білого шуму"з від'ємними значеннями;

- розглянуто методичні аспекти навчання математики та інформатики в освітніх закладах, зокрема, досліджено:

  - питання математичного моделювання із застосуванням сучасних інноваційних комп'ютерних технологій;

  - питання можливостей використання нестандартних підходів і графічного калькулятора вільного доступу, для побудови графіків функцій, які використовуються при розв'язуванні ірраціональних рівнянь з параметрами та ітераціями;

  - ефективність методу візуалізації шляхом використання платформи Genially для створення інтерактивного анімованого контенту;

  - методичні особливості дистанційного навчання при вивченні середовища програмування Скретч та доцільність використання мобільних застосунків для вивчення програмування в шкільному освітньому процесі.

Зміст

ВСТУП

У звіті наведені результати, які одержані співробітниками кафедри диференціальних рівнянь ЧНУ ім. Ю.Федьковича протягом 2018-2022 р.р. при виконанні НДР "Дослідження розв'язків псевдодиференціальних рівнянь та задачі термоелектропружності". Ці дослідження є продовженням виконаної в 2013 -2017 р.р. кафедрою диференціальних рівнянь НДР "Дослідження крайових задач для рівнянь з частинними похідними та задач оптимального керування". Звіт складається з реферату, вступу, семи розділів, висновків, додатку та переліку посилань.

Результати, що представлені в першому розділі, стосуються псевдодиференціального рівняння з оператором Рісса дробового диференціювання, яке є узагальненням відомого рівняння фрактальної дифузії. З'ясовується природничий зміст цього рівняння та встановлюється його зв'язок з симетричними стійкими випадковими процесами П.Леві в контексті задачі про локальний вплив рухомих об'єктів в гравітаційних полях Рісса. Досліджено властивості фундаментального розв'язоку задачі Коші та встановлено її коректну розв'язність в класі необмежених, розривних з інтегровною особливістю початкових функцій. При цьому, знайдено форму класичного розв'язку цієї задачі та досліджено властивості його гладкості й поведінку на нескінченності. Також, за певних умов на коефіцієнт флуктуації, встановлено аналог принципу максимуму, за допомогою якого обгрунтовано єдиність розв'язку задачі Коші. Результати цих досліджень дозволили охарактеризувати загальну природу стійких симетричних випадкових процесів Леві.

Другий розділ присвячений системам Шилова диференціальних рівнянь із частинними похідними. У ньому з'ясовується питання про багатство класу Шилова параболічних систем зі змінними коефіцієнтами шляхом означення нових класів систем, які є параболічно стійкі до зміни своїх коефіцієнтів. Досліджуються властивості фундаментальних роз'язків задачі Коші для таких систем. Крім цього, тут досліджуються гіперболічних за Шиловим систем у просторах основних і узагальнених функцій І.М. Гельфанда та Г.Є. Шилова. З'ясовуються основні властивості функції Гріна для таких систем та здійснюється розширення відомих класів коректності задачі Коші. Одержані результати проілюстровано на прикладі рівняння коливання необмеженої струни.

У третьому розділі для параболічного рівняння другого порядку з імпульсною дією за часовою змінною розглядаються задачі Коші й Діріхле, а також, задача зі скісною похідною та одностороння крайова задача. Досліджується випадок, коли коефіцієнти рівняння мають степеневі особливості довільного порядку як за часовою, так і за просторовими змінними на деякій множині точок. За допомогою принципа максимуму та апріорних оцінок доводиться існування та єдиність розв'язків поставлених задач в гельдерових просторах зі степеневою вагою.

Четвертий розділ присвячений дослідженню багатоточкових за часом задач Коші й Діріхле, а також, задачі зі скісною похідною для параболічного рівняння другого порядку зі степеневим виродженням у коефіцієнтах рівняння і крайових умовах. Коефіцієнти рівняння можуть допускати степеневі особливості довільного порядку за будь-якими змінними на деякій множині точок. Необхідні та достатні умови існування розв'язку доведено за допомогою принципу максимуму та апріорних оцінок в гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги залежить від степеневих особливостей коефіцієнтів рівняння. Також, у цьому розділі розв'язується задача про оптимальне керування системою, що описується задачею зі скісною похідною та інтегральною умовою за часовою змінною для параболічного рівняння другого порядку. Розглянуто випадки внутрішнього, стартового та межового керування. Критерій якості задається сумою об'ємних та поверхневих інтегралів. За допомогою принципу максимуму та апріорних оцінок встановлено існування і єдиність розв'язку нелокальної параболічної крайової задачі з виродженням. Крім цього, досліджена задача оптимального керування системою, що описується загальною крайовою задачею для 2b-параболічного рівняння.

У п'ятому розділі розв'язується обернена задача термоелектрики в зонально-неоднорідному середовищі на основі узагальненого підходу до опису термоелектричного поля. Вивчається можливість керувати вихровими термоелектричними струмами в такому середовищі. Знайдено аналітичний розв'язок цієї задачі та розроблено числовий метод знайходження його наближеного значення. Також, розглянуто побудову утворюючої функції термоелектричного поля для двовимірного гіротропного середовища, яка спрощує знаходження розподілів температури, потенціалу та струму, необхідних для створення гіротропних термоелементів. Розглянуто приклади використання утворюючої функції для знаходження вихрових струмів у плоскому гіротропному середовищі.

Результати, подані в шостому розділі, стосуються деяких еволюційних рівнянь і задач. Тут метеодом перетворення Фур'є-Бесселя знайдено фундаментальний розв'язок задачі Коші для параболічного рівняння з операторами Бесселя, коефіцієнти якого є компонентами просторової змінної. Моделюються деякі динамічні процеси методом гібридних інтегральних перетворень типу Ейлера, Бесселя на кусково-однорідних інтервалах. Вперше сформульовано та розв'язано стохастичну багатоточкову задачу зі збуреннями типу "білого шуму"з від'ємними значеннями.

Заключний сьомий розділ присвячений методиці навчання математики та інформатики в освітніх закладах. У ньому розглянуто питання математичного моделювання із застосуванням сучасних інноваційних комп'ютерних технологій, а також, питання можливостей використання нестандартних підходів і графічного калькулятора вільного доступу, для побудови графіків функцій, які використовуються при розв'язуванні ірраціональних рівнянь з параметрами та ітераціями. Тут також досліджено ефективність методу візуалізації шляхом використання платформи Genially для створення інтерактивного анімованого контенту. Розглянуто методичні особливості дистанційного навчання при вивченні середовища програмування Скретч та доцільність використання мобільних застосунків для вивчення програмування в шкільному освітньому процесі.

Дослідження, результати яких увійшли до звіту, використовуютья в навчальному процесі, зокрема, при читанні курсів "Диференціальні моделі соціальних і природничих процесів "Вибрані розділи математичної фізики "Диференціальні рівняння", при написанні курсових та дипломних робіт.

За звітний період опубліковано одну монографію державною мовою та один розділ монографії мовою Європейського союзу (В.Літовченко), дванадцять навчальних посібники (Ленюк О.М., Лусте І.П., Лучко В.М., Мельничук Л.М., Перун Г.М., Пукальський І.Д., Яшан Б.О.), в 2020 р. успішно захищено дисертацію доктора філософії спеціальності 111 математика (Б.Яшан, науковий керівник Пукальський І.Д.). Матеріали досліджень надруковано в 84 фахових виданнях, з них – 38 публікацій у виданнях, що входять до наукометричних баз даних Scopus і Web of Science.

Розділ 1

ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ФЛУКТУАЦІЙ ГРАВІТАЦІЙНИХ ПОЛІВ РІССА

У цьому розділі досліджується псевдодиференціальне рівняння з оператором Рісса дробового диференціювання, яке природньо узагальнює відоме рівняння фрактальної дифузії. Його фундаментальний розв'язок задачі Коші є щільністю розподілу ймовірностей для сили локальної взаємодії рухомих об'єктів у відповідному гравітаційному полі Рісса. Для цього рівняння встановлено коректну розв'язність задачі Коші в класі необмежених, розривних з інтегровною особливістю початкових функцій. При цьому, знайдено форму класичного розв'язку цієї задачі та досліджено властивості його гладкості й поведінку на нескінченності. Також, за певних умов на коефіцієнт флуктуації, встановлено аналог принципу максимуму, за допомогою якого обгрунтовано єдиність розв'язку задачі Коші. Результати цих досліджень дозволяють зрозуміти загальну природу стійких симетричних випадкових процесів Леві: кожен такий процес Леві можна трактувати, як процес локального впливу рухомих об'єктів у системі, в якій взаємодія між масами відбувається згідно з певним степеневим законом.

1.1 Вступ

Однією з основних проблем небесної механіки є аналіз природи сили взаємодії між об'єктами в тій чи іншій зірковій системі. Сила $\mathcal{F}$, що діє на конкретну зірку системи має дві складові, перша K – це вплив усієї системи вцілому і друга F – локальний вплив безпосереднього оточення: $\mathcal{F} = K + F$.

Вплив усієї системи можна описати за допомогою гравітаційного потенціалу $\mathcal{R}(r;t)$ [123], одержаного традиційно інтегруванням зваженої густини

$n(r;m;t)$, яка характеризує середній просторовий розподіл зірок різної маси m у момент часу t. Така сила K, віднесена до одиниці маси, що діє на розглядувану зірку $Z(0)$ з боку системи (як цілого), визначається виразом

$$K(r;t) = -\mathrm{grad}\mathcal{R}(r;t).$$

Сила $K(r;t)$ – функція з повільною зміною у просторі й часі, оскільки відповідний потенціал $\mathcal{R}(r;t)$ характеризує "згладжений" розподіл матерії в зірковій системі. Тоді як інша сила $F(t)$, віднесена до одиниці маси, має відносно швидкі, різькі зміни, спричинені миттєвими змінами локального розподілу зірок з оточення Z у момент часу t. Величина $F(t)$ піддається флуктуаціям, тому можна говорити лише про її ймовірнісні значення.

Дослідженням статистичних властивостей $F(t)$ займався відомий вчений Ж.Хольцмарк [103]. Його дослідження грунтуються на класичному гравітаційному законі Ньютона "обернених квадратів", згідно з яким

$$F(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} F_j = G\sum_{j=1}^{N(t)} \frac{m_j}{|r_j|^2} r_j^{\circ},$$

де G – гравітаційна стала, m_j – маса типової зірки "поля", r_j – радіус-вектор її положення відносно розглядуваної зірки Z, розміщеної у початку координат, $r_j^{\circ} := r_j/|r_j|$ – орт вектора r_j, а $N(t)$ – кількість зірок, що на момент t формують локальне оточення Z. Припустивши сталість середньої густини $n(r;m;t) \equiv n$ просторового розподілу зірок, а також, виконання рівності

$$N = \frac{4}{3}\pi R^3 n \quad (\forall R > 0),$$

Хольцмарк класичними засобами теорії ймовірностей у поєднанні з інтегральним численням знайшов стаціонарний розподіл $W(F)$ величини F у вигляді

$$W(F) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi,F)-a|\xi|^{3/2}} d\xi \equiv \mathbb{F}^{-1}[e^{-a|\xi|^{3/2}}](F).$$

Тут $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток у $\mathbb{R}^3$, $|x| := (x,x)^{1/2}$, $x \in \mathbb{R}^3$; $a := \frac{4}{15}(2\pi G)^{3/2} n < m^{3/2} >$ – коефіцієнт флуктуацій, в якому $< m^{3/2} >$ – середнє значення величини $m^{3/2}$, що відповідає розглядуваному закону розподілу зірок у зірковій системі, а $\mathbb{F}$ – оператор перетворення Фур'є.

Даний розподіл Хольцмарка відноситься до класу розподілів П.Леві

$$\mathcal{L}_\alpha(x) = \mathbb{F}^{-1}[e^{-b|\xi|^\alpha}](x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

симетричних стійких випадкових процесів [26]. Те, що $\mathcal{L}_\alpha(\cdot)$ лише при $\alpha \in (0;2]$ є функцією розподілу ймовірностей було остаточно встановлено П.Леві в [111].

Яскравими представниками цього класу є також класичні розподіли Гауса ($\alpha = 2$) і Коші ($\alpha = 1$). У сучасній літературі наведено багато прикладів реальних застосувань розподілів Хольцмарка, Коші, Гауса та Парето в астрономії, ядерній фізиці, економіці, соціології, в промисловій та військовій галузях тощо [101]. Кожне з цих застосувань характеризує стохастичні особливості розподілів Леві при тому чи іншому значенні α.

Однак, крім індивідуальних характеристик, симетричні стійкі випадкові процеси Леві мають спільну природу. У цьому розділі встановлено, що кожен такий процес Леві при $\alpha \in (0;2)$ можна трактувати, як процес локального впливу рухомих об'єктів у системі, в якій взаємодія між масами відбувається згідно з певним степеневим законом $(\cdot)^{-\beta}$. Зокрема класичному процесу Хольцмарка ($\alpha = 3/2$) відповідає взаємодія з $\beta = 2$ (випадок ньютонівської гравітації), а процесу Коші – взаємодія з показником $\beta = 3$. Тут також розглянуто задачу Хольцмарка в загальній постановці та одержано псевдодиференціальне рівняння (ПДР) з оператором Рісса дробового диференціювання, функцією Гріна задачі Коші для якого є відповідний нестаціонарний розподіл Хольцмарка. Наявність цього рівняння відкриває широкі можливості дослідження процесів Хольцмарка в областях з краями засобами теорії крайових задач для ПДР.

1.2 Задача про локальний вплив рухомих об'єктів

Розглянемо зіркову систему, в якій взаємодія між масами підпорядкована потенціалу М.Ріса [123], тобто гравітаційний вплив між її двома довільними зірками маси M і m описується законом

$$F = G\frac{Mm}{|r|^\beta} r^\circ, \quad \beta > 0, \tag{1.1}$$

де G – відповідна гравітаційна стала, а r – вектор відстані між цими зірками. Розвиваючи ідею Хольцмарка, знайдемо нестаціонарний розподіл $W_\beta(F(t))$ для сили $F(t)$, яка діє на одиницю маси зірки Z у момент часу t внаслідок гравітації, спричиненої зірками з її близького оточення.

Припустимо також, що розподіл зірок в околі Z піддається флуктуаціям і, що зірки різної маси m зустрічаються у зірковій системі згідно з деяким цілком визначеним, емпірично встановленим законом, при цьому, у кожен момент часу t флуктуації густини зірок підпорядковані умові сталості їх середньої густини на одиницю об'єму:

$$n(r;m;t) \equiv n(t).$$

Нехай розглядувана зірка Z знаходиться у початку координат системи, а її сферичний окіл радіуса R у момент часу t містить $N(t)$ зірок. Тоді, згідно з вище зазначеним,

$$F(t) = G\sum_{j=1}^{N(t)} \frac{m_j}{|r_j|^{\beta+1}} r_j \equiv \sum_{j=1}^{N(t)} F_j$$

і

$$N(t) = \frac{4}{3}\pi R^3 n(t). \tag{1.2}$$

Спочатку для фіксованого t розглянемо розподіл $W_{\beta,N(t)}\big(F(t)\big)$ у центрі сферичного околу радіуса R, який охоплює $N(t)$ зірок системи і знайдемо ймовірність $W_{\beta,N(t)}\big(F_\circ(t)\big)dF_\circ(t)$ того, що величина $F(t)$ потрапляє в куб $[F_\circ(t); F_\circ(t)+dF_\circ(t)] \subset \mathbb{R}^3$. Застосувавши відомий метод характеристичних функцій, одержимо, що

$$W_{\beta,N(t)}\big(F_\circ(t)\big) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi,F_\circ(t))} A_{N(t)}(\xi) d\xi,$$

де

$$A_{N(t)}(\xi) := \prod_{j=1}^{N(t)} \int\limits_0^{+\infty} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,F_j)} \tau_j(r_j;m_j;t) dr_j \Bigg) dm_j.$$

Тут $\mathbb{K}_R(0)$ – куля радіуса R з центром у початку координат, а $\tau_j(r_j;m_j;t)$ – розподіл ймовірності того, що в момент часу t j-та зірка має масу m_j і знаходиться у положенні r_j. Якщо тепер зважити на те, що мають місце лише флуктуації, сумісні з просторовою сталістю середньої густини, то тоді

$$\tau_j(r_j;m_j;t) = \frac{3\tau(m;t)}{4\pi R^3},$$

де $\tau(m;t)$ – частота, з якою зустрічаються зірки різної маси в момент часу t.

Звідси приходимо до зображення

$$A_{N(t)}(\xi) = \Bigg(\frac{3}{4\pi R^3} \int\limits_0^{+\infty} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,\eta)} \tau(m;t) dr \Bigg) dm \Bigg)^{N(t)},$$

в якому

$$\eta := Gmr/|r|^{\beta+1}. \tag{1.3}$$

Спрямувавши тепер $R \to +\infty$ і $N(t) \to +\infty$, згідно з (1.2) дістанемо:

$$W_\beta(F(t)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi, F(t))} A(\xi; t) d\xi, \tag{1.4}$$

де

$$A(\xi; t) := \lim_{R \to \infty} \left[\frac{3}{4\pi R^3} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} e^{i(\xi,\eta)} \tau(m; t) dr \right) dm \right]^{4\pi R^3 n(t)/3}.$$

Оскільки для кожного t

$$\frac{3}{4\pi R^3} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} \tau(m; t) dr \right) dm = 1,$$

то

$$A(\xi; t) = \lim_{R \to \infty} \left[1 - \frac{3}{4\pi R^3} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{K}_R(0)} (1 - e^{i(\xi,\eta)}) \tau(m; t) dr \right) dm \right]^{4\pi R^3 n(t)/3}. \tag{1.5}$$

Далі, абсолютна збіжність у (1.5) інтеграла зі змінною інтегрування r в усьому просторі $\mathbb{R}^3$ при $\beta > \frac{3}{2}$ дозволяє записати рівність (1.5) у вигляді

$$A(\xi; t) = \lim_{R \to \infty} \left[1 - \frac{3}{4\pi R^3} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} (1 - e^{i(\xi,\eta)}) \tau(m; t) dr \right) dm \right]^{4\pi R^3 n(t)/3}$$

та одержати зображення

$$A(\xi; t) = e^{-n(t) B_\beta(\xi; t)}, \tag{1.6}$$

в якому

$$B_\beta(\xi; t) := \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} (1 - e^{i(\xi,\eta)}) \tau(m; t) dr \right) dm.$$

Перейшовши у внутрішньому інтегралі виразу з попередньої рівності від змінної інтегрування r до змінної η згідно з правилом (1.3), а відтак, до сферичної системи координат з віссю аплікат, спрямованою в напрямку вектора

ξ, знайдемо:

$$B_\beta(\xi;t) = \frac{4\pi(G|\xi|)^{3/\beta} < m^{3/\beta} >}{\beta} \int\limits_0^{+\infty} (\rho - \sin\rho)\rho^{-2-3/\beta} d\rho.$$

Зазначимо, що інтеграл з останньої рівності збігається лише при $\beta > \frac{3}{2}$. Зінтегрувавши його частинами, прийдемо до зображення

$$B_\beta(\xi;t) = \frac{4\beta\pi \mathrm{I}(\beta)}{3(\beta+3)}(G|\xi|)^{3/\beta} < m^{3/\beta} >, \quad t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^3, \beta > 3/2, \tag{1.7}$$

в якому

$$\mathrm{I}(\beta) := \begin{cases} \frac{\beta}{3-\beta}\Gamma(2 - 3/\beta)\cos\frac{(2-3/\beta)\pi}{2}, & \frac{3}{2} < \beta < 3, \\ \frac{\pi}{2}, & \beta = 3, \\ \Gamma(1 - 3/\beta)\sin\frac{(1-3/\beta)\pi}{2}, & \beta > 3 \end{cases}$$

(тут $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція Ейлера).

Об'єднуючи рівності (1.4), (1.6) і (1.7), остаточно знайдемо, що

$$W_\beta(F(t)) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi, F(t))} e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}} d\xi,$$

де

$$a_\beta(t) := \frac{4\beta\pi \mathrm{I}(\beta)}{3(\beta+3)} G^{3/\beta} n(t) < m^{3/\beta} > .$$

Отже, правильне твердження.

Теорема 1.1 *При раніше зазначених припущеннях, для кожного* $\beta > 3/2$ *функція*

$$W_\beta(F(t)) = \mathbb{F}^{-1}\Big[e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}\Big](F;t),$$

є розподілом ймовірностей сили $F(t)$ *локального впливу рухомих об'єктів у системі з взаємодією, що відбувається згідно зі степеневим законом* (1.1).

Уведемо позначення $\mathcal{H}_\gamma(F;t) := W_\beta(F(t))$, де $\gamma := 2/\beta$. Функцію $\mathcal{H}_\gamma(\cdot;\cdot)$ назвемо розподілом Хольцмарка порядку γ флуктуацій нестаціонарних гравітаційних полів. Класичній ситуації, розглянутій Хольцмарком відповідає $\beta = 2$; у цьому випадку порядок розподілу $\gamma = 1$. З огляду на співвідношення $\beta > 3/2$, це єдиний випадок цілого порядку γ, решта можливих значень γ мають не нульову дробову частину: $\gamma \in (0; 4/3)$.

1.3 Зв'язок з псевдодиференціальними рівняннями

Дослідження флуктуацій локальної взаємодії рухомих об'єктів, особливо в обмеженому середовищі з тими чи іншими умовами на межі, хотілося б проводити шляхом зведення до розв'язування відповідних крайових задач для диференціальних чи псевдодиференціальних рівнянь. Це дозволило б задіяти розвинутий обчислювальний апарат теорії крайових задач і скористатися відомими її результатами. У зв'язку з цим виникає потреба в одержанні відповідного диференціального рівняння, яке адекватно відображає досліджуваний процес. Спробуємо за певних умов вивести це рівняння "відштовхуючись" від функції розподілу $\mathcal{H}_\gamma$. Для цього попередньо з'ясуємо властивості цієї функції.

Припускатимемо тут, що коефіцієнт $a_\beta(\cdot)$ – додатна, неперервно-диференційовна функція на проміжку $(0;T]$. Безпосередньо з [43, 37] випливає, що для всіх $\gamma \in (0;4/3)$ функція $\mathcal{H}_\gamma(x;t)$ на множині $\mathbb{R}^3 \times (0;T]$ диференційовна за t і нескінченно диференційовна за змінною x, причому для її похідних виконуються наступні оцінки:

$$|\partial_x^k \mathcal{H}_\gamma(x;t)| \leq c_1 t (t^{\frac{2}{3\gamma}} + |x|)^{-(3+|k|+\frac{3\gamma}{2})}; \tag{1.8}$$

$$|\partial_t \partial_x^k \mathcal{H}_\gamma(x;t)| \leq c_2 t^{\frac{2}{\gamma}-1} (t^{\frac{2}{3\gamma}} + |x|)^{-(3+|k|+\frac{3\gamma}{2})},$$

з деякими додатними сталими c_1 і c_2.

Оцінка (1.8) забезпечує належність $\mathcal{H}_\gamma(\cdot;t) \in L_1(\mathbb{R}^3)$ при кожному фіксованому $t \in (0;T]$, що в свою чергу гарантує існування перетворення Фур'є функції $\mathcal{H}_\gamma(\cdot;t)$ та виконання рівності

$$\mathbb{F}[\mathcal{H}_\gamma(x;t)](\xi;t) = e^{-a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3\gamma}{2}}}, \quad t \in (0;T], \xi \in \mathbb{R}^3. \tag{1.9}$$

Класичними засобами переконуємось у правильності рівності

$$\partial_t \mathcal{H}_\gamma(x;t) = -\frac{a'_\beta(t)}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{\frac{3\gamma}{2}} e^{-i(x,\xi) - a_\beta(t)|\xi|^{\frac{3\gamma}{2}}} d\xi, \quad t \in (0;T],\ \xi \in \mathbb{R}^3,$$

з якої, врахувавши (1.9), знаходимо:

$$\partial_t \mathcal{H}_\gamma(x;t) = -a'_\beta(t) \mathbb{F}^{-1}\left[|\xi|^{\frac{3\gamma}{2}} \mathbb{F}[\mathcal{H}_\gamma](\xi;t)\right](x;t), \quad t \in (0;T],\ \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Отже, розподіл Хольцмарка $\mathcal{H}_\gamma$ є розв'язком такого псевдодиференціального рівняння:

$$\partial_t u(x;t) + a'_\beta(t) A_\nu u(\xi;t) = 0, \quad t \in (0;T],\ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.10}$$

Тут $n = 3$, $\nu := 3/\beta$, $a'_\beta(t) := \frac{da_\beta(t)}{dt}$, A_ν – оператор Рісса дробового диференціювання порядку ν [79], тобто $A_\nu = (-\Delta)^{\nu/2}$, де Δ – оператор Лапласса.

З огляду на цей факт, рівняння (1.10) природно назвати ПДР локальних флуктуацій гравітаційних полів Рісса, спричинених рухомими об'єктами.

У простішому випадку $a'_\beta(t) \equiv \text{const}$ рівняння (1.10) відоме, як "рівняння фрактальної дифузії"або ж, "рівняння ізотропної супердифузії"[81, с.251]. Це рівняння є джерелом багатьох випадкових процесів [106]. Загалом відомо, що дробовий лапласіан A_ν є нескінченно малим генератором процесів Леві (*див.*, наприклад, [99, 98]).

У сучасній літературі наведено багато прикладів застосувань розподілів Леві в астрономії, ядерній фізиці, економіці, соціології в промисловій та військовій галузях тощо [1, 125, 30]. Важливий приклад для мотивації дослідження рівняння фрактальної дифузії наведено в монографії [100, с.7]. Тут запропоновано ймовірнісну модель випадкового блукання частинки X стрибками в довжину – "політ Леві" і показано, що ймовірність $u(x;t)$ перебування частинки X на момент часу t в просторовій точці x, є розв'язком рівняння (1.10) при $a'_\beta(t) \equiv 1$. Процеси такого типу в природі спостерігаються досить часто, з цього приводу *див.* біологічні спостереження в [97, 128].

Домовимось надалі фундаментальний розв'язок (або функцію Гріна) задачі Коші для (1.10) позначати $G_\nu(x;t)$:

$$G_\nu(x;t) := \mathbb{F}^{-1}\left[e^{-|\xi|^\nu \int\limits_0^t da_\beta(\tau)}\right](x;t), \qquad t \in (0;T],\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.11}$$

З'ясуємо питання існування граничного значення розподілу $\mathcal{H}_\gamma(\cdot;t)$ у точці $t = 0$.

Спочатку розглянемо випадок $a_\beta(0) \neq 0$. Згідно з рівністю (1.9) та відомою формулою перетворення Фур'є згортки елементів класу Лебега $L_1(\mathbb{R}^3)$ одержуємо, що

$$\mathcal{H}_\gamma(x;t) = \big(G_\nu * \hat{\mathcal{H}}_\gamma\big)(x;t), \qquad t \in (0;T],\ \xi \in \mathbb{R}^3,$$

де $\hat{\mathcal{H}}_\gamma(\cdot) := \mathcal{H}_\gamma(\cdot;0)$ – відповідний стаціонарний розподіл Хольцмарка.

Для кожної неперервної обмеженої на $\mathbb{R}^3$ функції $\varphi(\cdot)$ виконується граничне співвідношення

$$\big(G_\nu * \varphi\big)(\cdot;t) \underset{t\to+0}{\to} \varphi(\cdot). \tag{1.12}$$

Звідси, врахувавши нескінченну диференційовність та омеженість на $\mathbb{R}^3$ функції $\hat{\mathcal{H}}_\gamma(\cdot)$, приходимо до виконання співвідношення

$$\mathcal{H}_\gamma(\cdot;t) \underset{t\to+0}{\to} \hat{\mathcal{H}}_\gamma(\cdot). \tag{1.13}$$

Таким чином, розподіл $\mathcal{H}_\gamma(x;t)$ – класичний розв'язок задачі Коші (1.10), (1.13).

Нехай тепер $a_\beta(0) = 0$, тоді безпосередньо з (1.9) випливає рівність

$$\mathcal{H}_\gamma(\cdot;t) = G_\nu(\cdot;t), \quad t \in (0;T]. \tag{1.14}$$

Зазначимо, що співвідношення (1.12) характеризує властивість "δ-подібності" функції $G_\nu(\cdot;t)$ у просторі S' розподілів Шварца [12]:

$$G_\nu(\cdot;t) \underset{t\to+0}{\to} \delta(\cdot) \tag{1.15}$$

(тут $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака). Тому при $a_\beta(0) = 0$ розподіл Хольцмарка $\mathcal{H}_\gamma(\cdot;t)$ – розв'язок задачі Коші (1.10), (1.15), який у звичайному розумінні задовольняє рівняння (1.10), а початкову умову (1.15) – у сенсі слабкої збіжності в просторі S'. Такий розв'язок G_ν називають функцією Гріна задачі Коші для рівняння (1.10).

Підсумуємо вищезазначене у вигляді наступного твердження.

Теорема 1.2 *Нехай $\beta > 3/2$ і $a_\beta(\cdot)$ – додатна, неперервно-диференційовна функція на проміжку $(0;T]$, тоді при $a_\beta(0) \neq 0$ відповідний розподіл Хольцмарка $\mathcal{H}_{2/\beta}(\cdot;t)$ на множині $\mathbb{R}^3 \times (0;T]$ є класичним розв'язком задачі Коші* (1.10), (1.13). *У випадку $a_\beta(0) = 0$, $\mathcal{H}_{2/\beta}(\cdot;t)$ – функція Гріна цієї задачі.*

Зауваження 1.1 *Рівність* (1.14) *розкриває зміст функції Гріна задачі Коші для рівняння* (1.10)*: G_ν – первинний розподіл Хольцмарка локального впливу на розглядуваний об'єкт з боку його рухомого оточення, який характеризує цей процес із самого початку його зародження, тобто з тієї миті, коли в оточенні об'єкта вперше з'явилися елементи локального впливу.*

Дослідження функції Гріна задачі Коші для ПДР вигляду (1.10) були започатковані С.Д. Ейдельманом і Я.М. Дрінем на початку 80-х років минулого століття [102]. Ними запропоновано метод побудови й дослідження функції G_ν, який грунтується на перетворенні Фур'є, та одержано такі оцінки:

$$|\partial_x^k G_\nu(x;t)| \leq c_1 t (t^{1/\nu} + |x|)^{-(n+|k|+[\nu])}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n,\ t \in (0;T],\ x \in \mathbb{R}^n \tag{1.16}$$

(тут $[\cdot]$ – ціла частина числа). Проте цей метод накладає обмеження на порядок ν ПДР: $\nu > 1$.

Точну асимптотичну поведінку функції Гріна $G_\nu(\cdot;t)$ в околі нескінченно віддалених точок було встановлено М.В. Федорюком у [83]:

$$G_\nu(\cdot;t) \sim |\cdot|^{-n-\nu},\ t > 0. \tag{1.17}$$

Згодом W.R. Schneider [126], ефективно використовуючи перетворення Мелліна, виражає функцію $G_\nu(\cdot;t)$ через спеціальні H-функції Фокса і, як наслідок, одержує асимптотику (1.17).

Новий підхід до дослідження властивостей функції $G_\nu(\cdot;t)$, який базується на використанні елементів теорії узагальнених функцій і гармонічного аналізу, застосував А.Н. Кочубей у [102]. Він уперше одержав оцінки (1.16), в яких $[\nu]$ замінено на ν, у випадку, коли розмірність просторової змінної більша за одиницю та $\nu \geq 1$.

У працях [43, 37], розвиваючи ідею з [102], поширено оцінки Кочубея на випадок $\nu > 0$.

1.4 Оператор Рісса дробового диференціювання та його розширення

Нехай $\mathbb{N}$ – множина всіх натуральних чисел, $\mathbb{C}^l(Q)$ – клас усіх неперервно диференційовних до порядку l функцій на множині Q, $\mathbb{S}$ – простір Л. Шварца швидко спадних функцій з класу $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ [12], а $\Pi_Q := \{(x;t) : \ x \in \mathbb{R}^n, t \in Q\}$.

Позначимо через $\mathbb{H}^{l,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ сукупність усіх функцій $f \in \mathbb{C}^l(\mathbb{R}^n)$, обмежених на множині $\mathbb{R}^n$ разом зі своїми похідними таких, що старша похідна $\partial^l f(\cdot)$ є локально Гельдеровою на $\mathbb{R}^n$ функцією порядку $\alpha \in (0;1]$, тобто такою, що для кожної компактної множини $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ існує додатна стала c, що для всіх $\{x, y\} \subset \mathbb{K}$ виконується нерівність

$$|\partial^l f(x) - \partial^l f(y)| \leq c|x-y|^\alpha.$$

Як уже зазначалось, оператором Рісса дробового диференціювання називають дробовий степінь оператора Лапласа, взятого зі знаком "мінус": $A_\nu = (-\triangle)^{\nu/2}$. На елементах простору $\mathbb{S}$ цей оператор визначається рівністю

$$(-\triangle)^{\nu/2} f = \mathbb{F}^{-1}[|\xi|^\nu \mathbb{F}[f]]. \tag{1.18}$$

Однак класична форма дробового диференціювання (1.18) мало придатна для розширення оператора A_ν на ширші класи функцій. Якщо врахувати відому формулу перетворення Фур'є згортки

$$\mathbb{F}[f * \varphi] = \mathbb{F}[f] \cdot \mathbb{F}[\varphi]$$

і покласти

$$\widetilde{\|\cdot\|}^\nu = \mathbb{F}^{-1}[|\xi|^\nu](\cdot),$$

то рівність (1.18) можна формалізувати до більш зручної для розширення форми

$$(-\triangle)^{\nu/2} f = \widetilde{\|\cdot\|}^{\nu} * f. \tag{1.19}$$

Реалізація цієї схеми стала можливою завдяки появі теорії розподілів Шварца. Саме тлумачачи оператор $\mathbb{F}^{-1}$ у сенсі узагальнених функцій, можна явно знайти $\widetilde{\|\cdot\|}^{\nu}$ [12]:

$$\widetilde{\|\cdot\|}^{\nu} = \frac{(2\pi)^n}{\gamma_n(\nu)} \begin{cases} |\cdot|^{-\nu-n}, & \nu+n+2k \neq 0, \nu \neq 2k, \\ |\cdot|^{-\nu-n} \ln|\cdot|^{-1}, & \nu+n+2k = 0, \\ (-\triangle)^{\nu/2}\delta(\cdot), & \nu = 2k, \end{cases}$$

де $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака, а $\gamma_n(\nu)$ – спеціальний нормуючий множник. При $\mathrm{Re}\nu < 0$ функція $\widetilde{\|\cdot\|}^{\nu}$ локально сумовна. Згортку з цією функцією називають потенціалом Рісса [79]

$$I^{\nu} f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\|x-y\|}^{\nu} f(y)dy, \tag{1.20}$$

а саму функцію $\widetilde{\|\cdot\|}^{\nu}$ – рісcовим ядром. Вперше потенціал з ядром $|\cdot|^{-\nu-n}$, $\mathrm{Re}\nu < 0$, з'явився в дисертаційній роботі О.Фростмана, виконаної під керівництвом М.Рісса.

У випадку $\mathrm{Re}\nu > 0$ інтеграл (2.2) має порядок особливості в точці x більший за розмірність простору $\mathbb{R}^n$. Такий інтеграл завжди розбігається, тому реалізація згортки (1.19) у вигляді (2.2) потребує коректного означення. Зміст інтегралу (2.2) можна надати шляхом його регуляризації, наприклад, відніманням відрізка ряду Тейлора функції f або взяттям скінченної різниці f:

$$(-\triangle)^{\nu/2} f(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\nu)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(\triangle_y^l f)(x)}{|y|^{n+\nu}} dy, \quad l > \nu. \tag{1.21}$$

Тут

$$(\triangle_y^l f)(x) = \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k l!}{k!(l-k)!} f(x-ky)$$

– скінченна різниця функції f у точці x порядку l з кроком y, а $d_{n,l}(\nu)$ – спеціальний нормуючий множник, який вибирається так, щоб $(-\triangle)^{\nu/2}$ не залежав від l. Так визначений оператор $(-\triangle)^{\nu/2}$, $\mathrm{Re}\nu > 0$, у класичній літературі прийнято називати оператором Рісса дробового диференціювання порядку ν, який ми тут позначаємо символом A_{ν}.

У рамках просторів Лебега $L_p(\mathbb{R}^n)$ гіперсингулярний інтеграл (1.21) породжує обернений оператор до потенціалу Рісса I^ν. Реалізація дробового диференціювання Рісса $(-\triangle)^{\nu/2}$ у вигляді гіперсингулярного інтеграла при $0 < \nu < 2$ вперше з'явилась у працях І.Стейна. Загальний випадок $0 < \nu$ розглядався П.Лізоркіним і С.Самком (див. огляд в [79]).

Наведемо тут зображення оператора A_ν у формі, більш зручній для наших досліджень. Для $\nu \in (0;2)$ на елементах f простору $\mathbb{S}$ означемо оператор $\hat{A}_\nu$ рівностями

$$(\hat{A}_\nu f)(x) = c(\nu) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(x+y) + [\nu]\big(y, \mathrm{grad} f(x)\big)}{|y|^{n+\nu}} dy, \quad \nu \neq 1, \tag{1.22}$$

і

$$(\hat{A}_1 f)(x) = c(1) \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x) - f(x+y)}{|y|^{n+1}} dy, \tag{1.23}$$

з деяким ваговим співмножником $c(\nu)$. Стандартним способом [79], тобто дією оператора перетворення Фур'є $\mathbb{F}$ на праві частини рівностей (1.22) і (1.23), переконуємось у правильності рівності

$$\hat{A}_\nu f = A_\nu f \quad (\forall f \in \mathbb{S})$$

при

$$c(\nu) = \begin{cases} \frac{2^\nu \Gamma(1+\nu/2)\Gamma((n+\nu)/2)}{\pi^{n/2}\Gamma(\nu/2)\Gamma(1-\nu/2)}, & 0 < \nu < 1, \\ \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}, & \nu = 1, \\ \frac{\nu\Gamma((3-\nu)/2)\Gamma((n+\nu)/2)}{\pi^{(n+1)/2}\Gamma(2-\nu)}, & 1 < \nu < 2. \end{cases} \tag{1.24}$$

Зазначимо, що інтеграл з рівності (1.22) збігається абсолютно, наприклад, для функцій з класу $\mathbb{H}^{[\nu],\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > \{\nu\}$, (тут $\{\cdot\}$ – дробова частина числа). Тому формула (1.22) дозволяє застосовувати оператор A_ν до функцій із ширших класів ніж простір $\mathbb{S}$. При $\nu = 1$ рівність (1.23) також здійснює розширення оператора A_ν, проте тут збіжність може бути лише умовна.

Означення 1.1 *Сукупність усіх визначених на* $\mathbb{R}^n$ *функцій* f*, для яких має зміст права частина зображення* (1.22) *або* (1.23) *із* $c(\nu)$*, що визначається рівністю* (1.24)*, позначимо через* $\mathcal{D}(A_\nu)$ *і назвемо областю визначення відповідного оператора* A_ν*.*

Очевидно, що стала функція $f(x) \equiv C$ належить до множини $\mathcal{D}(A_\nu)$ при кожному $\nu \in (0;2)$, при цьому, $A_\nu f = 0$.

Відомості про розширення оператора Рісса дробового диференціювання на ширші класи функцій, а також оцінки (1.13), (1.14) нам знадобляться при розв'язуванні задачі Коші для ПДР (1.10) з необмеженими початковими даними та дослідженні властивостей розв'язків цієї задачі.

1.5 Класичні розв'язки з необмеженими граничними значеннями

Надалі вважатимемо, що коефіцієнт $a_\beta(\cdot)$ локальної флуктуації гравітаційного поля є неперервно-диференційовною функцією на відрізку $[0;T]$ такою, що

$$\hat{a}_\beta(t) := a_\beta(t) - a_\beta(0) > 0 \quad (\forall t \in (0;T]). \tag{1.25}$$

Нехай функція $f(\cdot)$ неперервна на множині $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ і така, що

$$|f(x)| \le \frac{c}{|x - x_0|^\gamma}, \quad 0 \le \gamma < n. \tag{1.26}$$

Для ПДР (1.10) розглянемо задачу Коші з початковою умовою

$$u(\cdot;t)_{|t=0} = f(\cdot). \tag{1.27}$$

Означення 1.2 *Розв'язком задачі Коші* (1.10), (1.27) *на множині* $\Pi_{(0;T]}$ *назвемо функцію* $u(x;t)$, *яка на цій множині диференційовна за змінною* t *і* $u(\cdot;t) \in \mathcal{D}(A_\nu)$, $t \in (0;T]$. *При цьому, функція* u *на* $\Pi_{(0;T]}$ *задовольняє рівняння* (1.10) *у звичайному розумінні, а початкову умову* (1.27) *у сенсі поточкової границі*

$$u(x;t) \underset{t \to +0}{\to} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}. \tag{1.28}$$

Правильне таке допоміжне твердження.

Лема 1.1 *Нехай* $a_\beta(\cdot) \in \mathbb{C}^1([0;T])$ *і виконується умова* (1.25). *Тоді функція*

$$u(x;t) = (f * G_\nu)(x;t), \quad (x;t) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{1.29}$$

є:

1) на $\mathbb{R}^n$ *нескінченно диференційовною за змінною* x *при фіксованому* $t \in (0;T]$ *і обмеженою разом з усіма своїми похідними;*

2) на $(0;T]$ *диференційовною за* t *при фіксованому* $x \in \mathbb{R}^n$.

При цьому, виконуються рівності

$$\partial_x^k u(x;t) = (f * \partial_x^k G_\nu)(x;t), \quad \partial_t u(x;t) = (f * \partial_t G_\nu)(x;t), \tag{1.30}$$

для $(x;t) \in \Pi_{(0;T]}$*, і при* $\gamma \neq 0$ *справджується граничне співвідношення*

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x;t) = 0 \quad (\forall t \in (0;T]). \tag{1.31}$$

Зауваження 1.2 *Наведений тут спосіб обґрунтування виконання граничного співвідношення* (1.31) *при доведення Леми 1.1 дозволяє при* $\gamma = 0$ *встановити виконання цього співвідношення також для початкової функції* f*, що степенево спадає на нескінченності:*

$$|f(x)| \leq \frac{c}{(1+|x|)^{\mu}}, \quad \mu > 0,\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Тут умова $f(x) \to 0$ *при* $|x| \to \infty$ *– важлива, у цьому переконує випадок* $f(x) \equiv 1$*:*

$$u(x;t) = (f * G_\nu)(x;t) \equiv 1, \quad (x;t) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Теорема 1.3 *Якщо для коефіцієнта* $a_\beta(\cdot)$ *виконується умова* (1.25) *і* $a_\beta(\cdot) \in \mathbb{C}^1([0;T])$*, то формулою* (1.29) *визначається класичний розв'язок задачі Коші* (1.10)*,* (1.27)*.*

У наступному пункті з'ясовано достатні умови єдиності розв'язку задачі Коші (1.10), (1.27).

1.6 Принцип екстремуму та його наслідки

Раніше ми припускали, що на множині $[0;T]$ коефіцієнт локальної флуктуації $a_\beta(\cdot)$ є неперервно-диференційовною функцією такою, що виконується умова (1.25):

$$a_\beta(t) > a_\beta(0) \quad (\forall t \in (0;T]).$$

Виконання цієї умови зобов'язує зростати функцію $a_\beta(\cdot)$, якщо не на всьому проміжку $(0;T]$, то хоча б на деякій його частині $(0;t_0)$, $t_0 < T$. При цьому, на $[t_0;T]$ функція $a_\beta(\cdot)$ може бути незростаючою. У цьому випадку маємо:

$$a'_\beta(t_0) = 0; \quad a'_\beta(t) > 0, \quad t \in (0;t_0); \quad a'_\beta(t) \leq 0, \quad t \in [t_0;T].$$

Таку точку t_0 будемо називати **точкою перевалу інтенсивності** коефіцієнта локальної флуктуації $a_\beta(\cdot)$ на проміжку $(0;T]$. Також, множину $[t_1;t_2] \subset [0;T]$, на якій $a_\beta(\cdot)$ неспадає, тобто

$$a'_\beta(t) \geq 0, \quad t \in [t_1;t_2],$$

назвемо **проміжком стабільної інтенсивності** коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$. Говоритимемо, що множина $[t_1; t_2]$ – **проміжок згасання інтенсивності** коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$, якщо

$$a'_\beta(t) \le 0, \quad t \in [t_1; t_2].$$

Очевидно, що якщо t_0 – перша точка перевалу інтенсивності $a_\beta(\cdot)$, то відрізок $[0; t_0]$ є проміжком стабільної інтенсивності цього коефіцієнта.

Правильне таке твердження.

Теорема 1.4 *Нехай $[t_1; t_2] \subset [0; T]$, а u – розв'язок ПДР (1.10) такий, що $u(\cdot; t) \in \mathbb{H}^{[\nu],\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > \{\nu\}$, при $t \in [t_1; t_2]$. Тоді якщо $[t_1; t_2]$ – проміжок стабільної інтенсивності коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$ і для u виконується граничне співвідношення (1.31) на $(t_1; t_2]$, то цей розв'язок на множині $\Pi_{[t_1;t_2]}$ зберігає знак, який він має в точці t_1. Якщо ж $[t_1; t_2]$ – проміжок згасання інтенсивності коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$ і для u на $[t_1; t_2)$ виконується (1.31), то розв'язок u на $\Pi_{[t_1;t_2]}$ зберігає знак, який він має в точці t_2. При цьому, якщо $u(x; t_1) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, у випадку, коли $[t_1; t_2]$ – проміжок стабільної інтенсивності, або $u(x; t_2) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, якщо $[t_1; t_2]$ – проміжок згасання інтенсивності, то $u(x; t) \equiv 0$ на $\Pi_{[t_1;t_2]}$.*

Зважаючи на лінійність оператора L ПДР (1.10), для розв'язків цього рівняння, які мають граничну поведінку (1.31) і стосовно просторової змінної є елементами класу $\mathbb{H}^{[\nu],\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > \{\nu\}$, безпосередньо з Теореми 4.1 випливають такі твердження.

Наслідок 1.1 *На проміжку $[t_1; t_2]$ стабільної інтенсивності коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$:*

1) у точці t_1 неможливе розгалуження розв'язків відповідного ПДР (1.10), тобто на множині $\Pi_{[t_1;t_2]}$ не існує двох різних розв'язків u_1 і u_2 цього рівняння таких, що

$$u_1(x; t_1) = u_2(x; t_1), \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

2) якщо розв'язки u_1 і u_2 рівняння (1.10) на гіперплощині $t = t_1$ мають різні значення, тобто

$$u_1(x; t_1) < u_2(x; t_1), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

то

$$u_1(x; t) < u_2(x; t), \quad (x; t) \in \Pi_{[t_1;t_2]};$$

3) задача Коші для рівняння (1.10) у класі $\mathbb{H}^{[\nu],\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > \{\nu\}$, може мати не більше одного розв'язку, що прямує до нуля при $|x| \to \infty$.

Звідси, врахувавши Лему 1.1 і Теорему 3.1, дістаємо наступне твердження.

Теорема 1.5 *Нехай $T_0 = T$, якщо коефіцієнт $a_\beta(\cdot)$ на інтервалі $(0;T)$ немає точки перевалу інтенсивності, інакше $T_0 = t_0$, де t_0 – перша точка перевалу інтенсивності $a_\beta(\cdot)$. Тоді на множині $\Pi_{(0;T_0]}$ задача Коші (1.10), (1.27) у класі $\mathbb{H}_{\mathrm{loc}}^{[\nu],\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > \{\nu\}$, має єдиний розв'язок. Він визначається формулою (1.29) і на $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ зберігає знак початкової функції f.*

Приклад

Нехай

$$k_\alpha(\cdot) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} |\cdot|^{\alpha-n}$$

– ядро Рісса порядку α з ваговим коефіцієнтом

$$\gamma_n(\alpha) = 2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma\Big(\frac{\alpha}{2}\Big) / \Gamma\Big(\frac{n-\alpha}{2}\Big),$$

тобто

$$k_\alpha(\cdot) \equiv \widetilde{\|\cdot\|}^{-\alpha}.$$

Розглянемо випадок, коли початкова функція $f(\cdot)$ – ядро $k_\alpha(\cdot)$:

$$f(\cdot) = k_\alpha(\cdot), \quad 0 < \alpha < n. \tag{1.32}$$

На достатньо "хороших" функціях $\varphi(\cdot)$ оператор $(-\Delta)^{-\alpha/2}$ дробового інтегрування Рісса порядку α, є потенціалом Рісса [79, с.357]

$$(I_x^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}} \equiv (-\Delta)^{-\alpha/2} \varphi(x),$$

для якого, очевидно, правильне зображення

$$(I_x^\alpha \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_\alpha(x-y)\varphi(y)dy \equiv (k_\alpha * \varphi)(x).$$

Скористаємося тут цим фактом.

При зазначеному α для функції $f(\cdot)$ виконується умова (1.5) із $x_0 = 0$, тому, згідно з твердженням Теореми 1.5, єдиним розв'язком відповідної задачі Коші (1.10), (1.27) на множині $\Pi_{(0;T_0]}$ є функція

$$u(x;t) = (k_\alpha * G_\nu)(x;t) \equiv (-\Delta)^{-\alpha/2} G_\nu(x;t), \tag{1.33}$$

яка разом з усіма своїми похідними є обмеженою, а також, додатною і прямуючою до 0 при $|x| \to +\infty$.

Враховуючи те, що при $a_\beta(0) = 0$ фундаментальний розв'язок G_ν задачі Коші для рівняння (1.10) є щільністю W_β розподілу ймовірностей для сили F локальної взаємодії рухомих об'єктів системи, з рівності (1.33) випливає такий **природничий зміст** задачі Коші (1.10), (1.27): *у випадку, коли для коефіцієнта локальної флуктуації виконується умова* $a_\beta(0) = 0$*, задача Коші* (1.10)*,* (1.27) *з початковою функцією* (1.32) *є математичною моделлю перетворення оператором* $(-\Delta)^{-\alpha/2}$ *випадкового процесу локальної взаємодії рухомих об'єктів у відповідному гравітаційному полі Рісса.*

Висновки до розділу

Для псевдодиференціального рівняння з оператором Рісса дробового диференціювання, що природньо узагальнює відоме рівняння фрактальної дифузії:

- з'ясовано, що його фундаментальний розв'язок задачі Коші є щільністю розподілу ймовірностей для сили локальної взаємодії рухомих об'єктів у відповідному гравітаційному полі Рісса;

- встановлено коректну розв'язність задачі Коші в класі необмежених, розривних з інтегровною особливістю початкових функцій;

- знайдено інтегральну форму класичного розв'язку цієї задачі та досліджено властивості його гладкості й поведінку на нескінченності;

- на інтервалах стабільної інтенсивності коефіцієнта флуктуації рівняння, встановлено аналог принципу максимуму.

Вперше встановлено загальну природу сійких симетричних випадкових процесів Леві.

Розглянуто приклад задачі Коші з початковою функцією – ядром Рісса, та встановлено її природничий зміст.

Результати цього розділу одержані В.А. Літовченком одноосібно, вони опубліковані в [41, 40, 108, 109, 42, 110].

Розділ 2

СИСТЕМИ ШИЛОВА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

У цьому розділі з'ясовується питання про багатство класу Шилова параболічних систем зі змінними коефіцієнтами шляхом означення нових класів систем, параболічно стійких до зміни своїх коефіцієнтів. Досліджуються властивості фундаментальних роз'язків задачі Коші для таких систем.

Також, вивчаються гіперболічних за Шиловим систем у просторах основних і узагальнених функцій І.М. Гельфанда та Г.Є.Шилова. Досліджуються основні властивості функції Гріна для таких систем та проводиться розширення відомих класів коректності задачі Коші.

2.1 Простори основних і узагальнених функцій

Нехай $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – клас усіх нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ функцій, а $S = S(\mathbb{R}^n)$ – відомій простір Л.Шварца швидко спадних функцій [127]. У першій половині минулого століття І.М. Гельфанд і Г.Є. Шилов означили ряд просторів, названих ними просторами типу S [12]. Означимо ці простори.

Для довільних n-вимірних векторів $\alpha = (\alpha_1; \ldots; \alpha_n)$ і $\beta = (\beta_1; \ldots; \beta_n)$ з невід'ємними компонентами розглянемо:

$$S_\alpha = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\Big|\, \exists A > 0 \;\; \forall m \in \mathbb{Z}_+^n \;\; \exists c_m > 0 \;\; \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|x^k \partial^m \varphi(x)| \leq c_m A^{|k|_+} k^{k\alpha}\};$$

$$S^\beta = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\Big|\, \exists B > 0 \;\; \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \;\; \exists c_k > 0 \;\; \forall m \in \mathbb{Z}_+^n \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|x^k\partial^m\varphi(x)| \le c_k B^{|m|_+} m^{m\beta}\};$$

$$S_\alpha^\beta = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\Big|\, \exists\{A,B,c\} \subset (0;+\infty)\ \forall\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+^n\ \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|x^k\partial^m\varphi(x)| \le cA^{|k|_+} B^{|m|_+} k^{k\alpha} m^{m\beta}\},$$

де $|q|_+ := |q_1| + \cdots + |q_n|$, $k^{k\gamma} := \prod_{j=1}^n k_j^{k_j\gamma_j}$, $\{q,\gamma\} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$.

Через $S_{\alpha,A}$, $A > 0$, позначимо сукупність усіх тих елементів $\varphi \in S_\alpha$, для яких при кожному $\delta > 0$

$$|x^k\partial^m\varphi(x)| \le c_{m\delta}(A+\delta)^{|k|_+} k^{k\alpha}, \quad c_{m\delta} > 0, \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+^n, x \in \mathbb{R}^n.$$

Якщо тепер у цій множині визначити норми за допомогою рівностей

$$\|\varphi\|_{m\delta} = \sup_{x,k}\left\{\frac{|x^k\partial^m\varphi(x)|}{(A+\delta)^{|k|_+} k^{k\alpha}}\right\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+^n, \delta \in \{1/j, j \in \mathbb{N}\},$$

то $S_{\alpha,A}$ перетвориться в повний зліченно-нормований простір.

Нехай далі $S^{\beta,B}$, $B > 0$, – сукупність функцій $\varphi \in S^\beta$, таких, що

$$\forall\rho > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\ \exists c_{k\rho} > 0\ \forall m \in \mathbb{Z}_+^n\ \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|x^k\partial^m\varphi(x)| \le c_{k\rho}(B+\rho)^{|m|_+} m^{m\beta},$$

а $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ – сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову

$$\forall\{\rho,\delta\} \subset (0;+\infty)\ \exists c_{\rho\delta} > 0\ \forall\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+^n\ \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|x^k\partial^m\varphi(x)| \le c_{\rho\delta}(A+\delta)^{|k|_+}(B+\rho)^{|m|_+} k^{k\alpha} m^{m\beta}.$$

Ці множини є повними зліченно-нормованими просторами з такими нормами:

$$\|\varphi\|_{k\rho} = \sup_{x,m}\left\{\frac{|x^k\partial^m\varphi(x)|}{(B+\rho)^{|m|_+} m^{m\beta}}\right\}, \quad \varphi \in S^{\beta,B};$$

$$\|\varphi\|_{\rho\delta} = \sup_{x,k,m}\left\{\frac{|x^k\partial^m\varphi(x)|}{(A+\delta)^{|k|_+}(B+\rho)^{|m|_+} k^{k\alpha} m^{m\beta}}\right\}, \quad \varphi \in S_{\alpha,A}^{\beta,B},$$

де $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $\{\rho,\delta\} \subset \{1/j, j \in \mathbb{N}\}$.

При $A_1 < A_2$ простір S_{α,A_1} неперервно вкладається в S_{α,A_2}, причому $S_\alpha = \bigcup_{A>0} S_{\alpha,A}$.

Отже,

$$S_\alpha = \lim_{A\to\infty} \operatorname{ind} S_{\alpha,A}.$$

Аналогічно

$$S^{\beta} = \lim_{B\to\infty} \operatorname{ind} S^{\beta,B}, \quad S^{\beta}_{\alpha} = \lim_{\substack{A\to\infty \\ B\to\infty}} \operatorname{ind} S^{\beta,B}_{\alpha,A}.$$

Простори S і типу S пов'язані між собою такими співвідношеннями [12]:

$$\mathbb{F}[S] = S; \quad \mathbb{F}[S_{\alpha}] = S^{\alpha}; \quad \mathbb{F}[S^{\beta}] = S_{\beta}; \quad \mathbb{F}[S^{\beta}_{\alpha}] = S^{\alpha}_{\beta},$$

де $\mathbb{F}[X]$ – простір Фур'є-образів елементів X.

Простори S_{α}, S^{β}, S^{β}_{α} ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$) утворюють топологічні алгебри відносно операції згортки, причому перетворення Фур'є і згортка пов'язані так:

$$\mathbb{F}[\varphi * \psi] = \mathbb{F}[\varphi]\mathbb{F}[\psi].$$

Для зазначених просторів правильні такі неперервні вкладення [12]:

$$S^{\beta}_{\alpha} \subset S^{\beta_1}_{\alpha_1} \subset \left\{ \begin{matrix} S^{\beta_1} \\ S_{\alpha_1} \end{matrix} \right\} \subset \left\{ \begin{matrix} S^{\beta_2} \\ S_{\alpha_2} \end{matrix} \right\} \subset S \subset L_2(\mathbb{R}^n), \ \alpha \leq \alpha_1 \leq \alpha_2, \beta \leq \beta_1 \leq \beta_2$$

(тут $L_2(\mathbb{R}^n)$ – простір Лебега сумовних у квадраті на $\mathbb{R}^n$ функцій).

Зауваження 2.1 *Надалі домовимося в позначенні простору типу S, в якого всі компоненти якогось індекса дорівнюють скаляру, замість цього вектора писати цей скаляр, наприклад $S^{(1;\ldots;1),(b;\ldots;b)} \equiv S^{1,b}$.*

Просторами типу S' назвемо топологічно спряжені простори $S_{\alpha}{}'$, $S^{\beta\prime}$ і $S^{\beta\prime}_{\alpha}$ з відповідними просторами S_{α}, S^{β} та S^{β}_{α}; S' – топологічно спряжений із S. Елементи просторів $S_{\alpha}{}'$, $S^{\beta\prime}$ і $S^{\beta\prime}_{\alpha}$ – узагальнені функції, які називатимемо розподілами Гельфанда і Шилова (з відповідних просторів).

Нехай X – один із просторів типу S, а X' – відповідний топологічно спряжений простір. Похідною m-го порядку узагальненої функції $f \in X'$ називається функціонал $\partial^m f$, дія якого на елементах $\varphi \in X$ визначається рівністю

$$< \partial^m f, \varphi >= (-1)^{|m|_+} < f, \partial^m_x \varphi >, \ \ m \in \mathbb{Z}^n_+.$$

Отже, розподіли Гельфанда і Шилова – нескінченно диференційовні узагальнені функції.

Наявність операції зсуву τ_h аргумента основних функцій φ у просторах типу S дозволяє поширити цю операцію на узагальнені функції $f \in X'$:

$$< f(x+h), \varphi >=< f, \varphi(x-h) >, \ \ h \in \mathbb{R}^n.$$

У просторах типу S' визначена операція множення на мультиплікатор μ у відповідному просторі основних функцій X за таким правилом:

$$< \mu f, \varphi >=< f, \mu\varphi >, \ f \in X', \varphi \in X.$$

Перетворення Фур'є елементів просторів типу S' визначається так:

$$\langle \mathbb{F}[f], \mathbb{F}[\varphi] \rangle := (2\pi)^n \langle f, \varphi \rangle, \quad f \in X', \varphi \in X.$$

Щодо оберненого перетворення Фур'є $\mathbb{F}^{-1}$, то воно визначається формулою

$$\langle \mathbb{F}^{-1}[g], \mathbb{F}^{-1}[\psi] \rangle = (2\pi)^{-n} \langle g, \psi \rangle, \quad \psi \in \mathbb{F}[X], g \in \mathbb{F}[X]'.$$

Попередній ланцюжок вкладень просторів основних функцій продовжується такими неперервними вкладеннями [12]:

$$L_2(\mathbb{R}^n) \subset S' \subset \begin{Bmatrix} S^{\beta_2\prime} \\ S_{\alpha_2}{}' \end{Bmatrix} \subset \begin{Bmatrix} S^{\beta_1\prime} \\ S_{\alpha_1}{}' \end{Bmatrix} \subset S^{\beta_1\prime}_{\alpha_1} \subset S^{\beta\prime}_{\alpha}, \quad \alpha \leq \alpha_1 \leq \alpha_2, \beta \leq \beta_1 \leq \beta_2.$$

На завершення цього пункту вкажемо умови, які гарантують існування згортки в просторах типу S'.

По-перше, якщо $f \in X'$, а $\varphi \in X$, то існує згортка $f * \varphi$, яка допускає зображення $(f * \varphi)(\cdot) = \langle f(\xi), \varphi(\cdot - \xi) \rangle$. Ця згортка має властивості лінійності та неперервності, є звичайною нескінченно диференційовною функцією, причому [52]

$$\partial^m (f * \varphi)(x) = (f * \partial^m \varphi)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{Z}^n_+.$$

По-друге, існує згортка двох функцій $\{f, g\} \subset X'$, якщо одна з цих функцій, наприклад g, є згортувачем у відповідному просторі X. Тоді

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f, g * \varphi \rangle, \ \varphi \in X.$$

Якщо для f і g із X' існує згортка $f * g$, то в просторі X' виконується рівність $\mathbb{F}[f * g] = \mathbb{F}[f]\mathbb{F}[g]$, при цьому, якщо g – згортувач у X, то в X правильна вже рівність

$$\mathbb{F}[g * \varphi](\cdot) = \overline{\mathbb{F}[g]}(\cdot)\mathbb{F}[\varphi](\cdot) \quad (\forall \varphi \in X),$$

з якої випливає, що g – згортувач у X лише тоді, коли $\mathbb{F}[g]$ – мультиплікатор у відповідному просторі $\mathbb{F}[X]$.

2.2 Окремі класи параболічних систем

2.2.1 Попередні відомості

Зафіксуємо довільно $\{m, p\} \subset \mathbb{N}$ і $T \in (0; +\infty)$, покладемо $\mathbb{N}_m := \{1; \ldots; m\}$, $\Pi_{(\tau;T]} := (\tau; T] \times \mathbb{R}^n$, і розглянемо систему диференціальних рівнянь із частинними похідними

$$\partial_t u(t; x) = A(t; i\partial_x) u(t; x), \ \ (t; x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{2.1}$$

в якій

$$A(t;i\partial_x) := \Bigg(\sum_{|k|_+\le p} a_k^{jl}(t) i^{|k|_+}\partial_x^k\Bigg)_{j,l=1}^m, \ u(t;x) := \mathrm{col}\big(u_1(t;x);\ldots;u_m(t;x)\big).$$

Тут $|k|_+ := k_1+\ldots+k_n$ для $k\in\mathbb{Z}_+^n$, $a_k^{jl}(\cdot)$ – коефіцієнти системи, i – уявна одиниця, а $u_j(\cdot;\cdot)$ – невідомі функції. Позначимо через A_0 матрицю

$$A_0(t;i\partial_x) := \Bigg(\sum_{|k|_+= p} a_k^{jl}(t) i^{|k|_+}\partial_x^k\Bigg)_{j,l=1}^m$$

і покладемо

$$A_1(t;i\partial_x) := A(t;i\partial_x) - A_0(t;i\partial_x).$$

Матриця

$$\mathcal{A}_0(t;\xi) = \Bigg(\sum_{|k|_+= p} a_k^{jl}(t)\xi^k\Bigg)_{j,l=1}^m$$

називається *матричним символом* диференціального виразу $A_0(t;i\partial_x)$.

У 1937 р. Г.І. Петровський у відомій праці [115] формулює означення параболічності для систем вигляду (2.1).

Означення 2.1 *Система* (2.1) *називається параболічною за Петровським на множині* $\Pi_{[0;T]}$, *якщо для кожного* $t\in[0;T]$ *існує величина* $\delta_0=\delta_0(t)>0$ *така, що для характеристичних чисел* λ_j, $j\in\mathbb{N}_m$, *матричного символу* $\mathcal{A}_0(t;\sigma)$ *виконується оцінка*

$$\max_{j\in\mathbb{N}_m}\mathrm{Re}\lambda_j(t;\sigma)\le-\delta_0(t), \tag{2.2}$$

для всіх $\sigma\in\mathbb{R}^n$, *таких, що* $\|\sigma\|=1$.

Безпосередньо з властивості однорідності за змінною ξ елементів матричного символу $\mathcal{A}_0(t;\xi)$ випливає, що система (2.1) буде параболічною за Петровським лише тоді коли $p=2b$, $b\in\mathbb{N}$. У зв'язку з цим, умова (2.2) параболічності з означення 2.1 набуває такого рівносильного вигляду:

$$\forall t\in[0;T]\,\exists\delta_0>0\,\forall\xi\in\mathbb{R}^n:\ \max_{j\in\mathbb{N}_m}\mathrm{Re}\lambda_j(t;\xi)\le-\delta_0\|\xi\|^{2b}. \tag{2.3}$$

Сьогодні класична теорія задачі Коші для параболічних за Перторвським систем вважається сформованою [85, 102, 19, 14, 15, 16].

У 1955 р. в [13] Г.Є. Шилов узагальнює поняття параболічності за Петровським у наступний спосіб.

Розглядається спочатку система (2.1) зі сталими коефіцієнтами $a_k^{jl}(t) \equiv a_k^{jl}$:

$$\partial_t u(t;x) = A(i\partial_x)u(t;x), \ \ (t;x) \in \Pi_{(0;T]}. \tag{2.4}$$

У цьому випадку параболічність за Шиловим системи означується подібним способом до параболічності за Петровським.

Означення 2.2 *Система* (2.4) *порядку p називається параболічною за Шиловим на множині $\Pi_{[0;T]}$ з показником параболічності h, $0 < h \le p$, якщо*

$$\exists \delta_0 > 0 \, \exists \delta \ge 0 \, \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \ \max_{j \in \mathbb{N}_m} \mathrm{Re}\lambda_j(\xi) \le -\delta_0 \|\xi\|^h + \delta, \tag{2.5}$$

де $\lambda_j(s)$ – характеристичні числа матричного символу $\mathcal{A}(s)$, $s \in \mathbb{C}^n$, диференціального виразу цієї системи.

Якщо ж коефіцієнти системи (2.1) залежать від t (неперервно), то уже, на відміну від параболічності за Петровським, параболічність за Шиловим цієї системи означується дещо інакше, з використанням поняття матриціанта системи лінійних диференціальних рівнянь.

Для системи (2.1) запишемо відповідну двоїсту за Фур'є систему

$$\partial_t v(t;\xi) = \mathcal{A}(t;\xi)v(t;\xi), \ \ 0 \le \tau < t \le T, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.6}$$

в якій $\mathcal{A}(t;\xi)$ – матричний символ диференціального виразу $A(t;i\partial_x)$ системи.

Означення 2.3 *Матриціантом системи* (2.6) *називається функційна матриця $\Theta_\tau^t(\cdot)$, $0 \le \tau < t \le T$, яка є розв'язком цієї системи, що задовольняє початкову умову*

$$\Theta_\tau^t(\cdot)|_{t=\tau} = E \ \ \big(\forall \tau \in [0;T]\big)$$

(тут E – одинична матриця).

Означення 2.4 *Система* (2.1) *порядку p з неперервними на $[0;T]$ коефіцієнтами називається параболічною за Шиловим на множині $\Pi_{[0;T]}$ з показником параболічності h, $0 < h \le p$, якщо для матриціанта $\Theta_\tau^t(\cdot)$, $0 \le \tau < t \le T$, відповідної двоїстої за Фур'є системи* (2.6), *виконується оцінка*

$$|\Theta_\tau^t(\xi)| \le c(1 + \|\xi\|^\gamma)e^{-\delta(t-\tau)\|\xi\|^h}, \quad (t;\xi) \in \Pi_{(\tau;T]}, \tag{2.7}$$

з деякими додатними сталими c і δ (тут $\gamma := (p-h)(m-1)$).

Зауваження 2.2 *За аналогією до $2b$-параболічності, параболічність за Шиловим називатимемо також $\{p,h\}$-параболічністю.*

Для рівномірно параболічних за Петровським систем (2.1) умова (2.7) – характерна властивість, яка є прямим наслідком із відповідної умови параболічності (2.2) [85]. Для параболічних систем (2.1) із залежними від t коефіцієнтами при $p \neq h$ підтвердити цей факт класичними засобами теорії параболічних систем через параболічну нестійкість таких систем до зміни своїх коефіцієнтів, взагалі кажучи, не вдається.

У [13] обгрунтовано, що клас параболічних за Шиловим систем зі змінними коефіцієнтами повністю охоплює сукупність усіх параболічних за Шиловим систем зі сталими коефіцієнтами.

Дослідження задачі Коші для параболічних за Шиловим систем проводились Г.Є. Шиловим, І.М. Гельфандом, Б.Л. Гуревичем, К.І. Бабенком, Г.М. Золотарьовим, Я.І. Житомирським, С.Д. Ейдельманом, Ф.О. Порпером, В.В. Городецьким, В.А. Літовченком та ін. Результатом цих досліджень для систем, коефіцієнти яких можуть залежати лише від часу, є класи коректності та єдиності задачі Коші, теореми про коректну розв'язність цієї задачі з узагальненими початковими даними типу ультрарозподілів Жевре, максимальні класи граничних значень розв'язків з просторів типу S, властивості стабілізації та локалізації розв'язків, теореми типу Ліувілля [13, 17, 25, 38, 82, 86].

2.2.2 Один клас параболічно стійких систем зі змінними коефіцієнтами

Розглянемо систему рівнянь

$$\partial_t u(t;x) = \{P_0(i\partial_x) + P_1(t;i\partial_x)\}u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(\tau;T]},\ \tau \in [0;T), \tag{2.8}$$

порядку $p \in \mathbb{N}$, в якій $u := \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_m)$,

$$P_0(i\partial_x) := \left(\sum_{|k|_+ \le p} a_k^{lj} i^{|k|_+} \partial_x^k \right)_{l,j=1}^m, \quad P_1(t;i\partial_x) := \left(\sum_{|k|_+ \le p_1} a_k^{lj}(t) i^{|k|_+} \partial_x^k \right)_{l,j=1}^m.$$

Припускатимемо, що відповідна система

$$\partial_t u(t;x) = P_0(i\partial_x)u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(\tau;T]}, \tag{2.9}$$

на множині $\Pi_{(\tau;T]}$ $\{p;h\}$-параболічна зі сталими коефіцієнтами, а коефіцієнти групи молодших членів $P_1(t;i\partial_x)$ – неперервні комплекснозначні функції, визначені на [0;T], при цьому величини p, p_1 і h задовольняють умову
(A): $\quad 0 \le p_1 + (p-h)(m-1) < h.$

Приклади системи (2.8) із умовою (A).

1°. Кожна параболічна за Петровським система (2.1) порядку $p = 2b$, $b \in \mathbb{N}$, зі сталими коефіцієнтами групи старших членів та неперервно залежними від t коефіцієнтами групи молодших членів є системою (2.8) із умовою (A). Оскільки у цьому випадку $p = h = 2b$, $p_1 = 2b - 1$ і, відповідно,

$$0 < p_1 + (p - h)(m - 1) = 2b - 1 < 2b = h.$$

2°. Нехай $n = 1, m = 2$, $a > 0$ і $c_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}_5$, – деякі неперервні на [0;T] комплекснозначні функції. Тоді система

$$\begin{cases} \partial_t u_1 &= \{-a\partial_x^4 + c_1(t)\partial_x^2\}u_1 + \{\partial_x^5 - \partial_x^3 + c_2(t)\partial_x\}u_2, \\ \partial_t u_2 &= \{(c_3(t) - 1)\partial_x^3\}u_1 - \{a\partial_x^4 - c_4(t)\partial_x^3 - c_5(t)\}u_2, \end{cases}$$

є системою (2.8) із умовою (A). Дійсно, поклавши

$$P_0(i\partial_x) = \begin{pmatrix} -a\partial_x^4 & \partial_x^5 - \partial_x^3 \\ -\partial_x^3 & -a\partial_x^4 \end{pmatrix},$$

$$P_1(t; i\partial_x) = \begin{pmatrix} c_1(t)\partial_x^2 & c_2(t)\partial_x \\ c_3(t)\partial_x^3 & c_4(t)\partial_x^3 + c_5(t) \end{pmatrix}$$

і розв'язавши відповідне характеристичне рівняння

$$\det\{P_0(s) - \lambda E\} = 0, \quad s \in \mathbb{C}^n,$$

знайдемо, що $\lambda_{1,2}(s) = -as^4 \pm i\sqrt{s^8 + s^6}$, $p = 5$, $p_1 = 3$ і $h = 4$. Для зазначених величин p, p_1 і h, очевидно, виконується умова (A).

Виконання умови (A) забезпечує параболічну стійкість системи (2.8) до зміни своїх молодших коефіцієнтів, що дозволяє класичними засобами обгрунтувати правильність наступного твердження.

Теорема 2.1 *Нехай (2.8) – система з неперервними коефіцієнтами, для якої виконується умова (A). Тоді для матрицанта $\Theta_\tau^t(\cdot)$ відповідної двоїстої за Фур'є системи на множині $\Pi_{(\tau;T]}$, $\tau \in [0;T)$, справджується оцінка (2.7).*

Наслідок 2.1 *Система (2.8) із умовою (A) – параболічна за Шиловим система зі змінними коефіцієнтами й показником параболічності h.*

Цей факт передусім характеризує багатство класу Шилова параболічних систем та його невичерпність параболічним класом Петровського.

2.2.3 Підклас $\{\vec{p}; \vec{h}\}$-параболічних систем

Специфіка означення параболічності як за Петровським, так і за Шиловим не передбачає індивідуальних характеристик параболічності системи окремо за кожною компонентою її просторової змінної. Таке абстрагування позбавляє можливості одержати точні результати на рівні кожної компоненти.

У зв'язку з цим у 1960 р. С.Д. Ейдельман пропонує ще одне узагальнення параболічності — так звану $\overrightarrow{2b}$-параболічність [102], згідно з якою істотно розширюється клас Петровського. У системах з такою параболічністю диференціювання за різними компонентами просторової змінної мають, взагалі кажучи, різну вагу відносно диференціювання за змінною t. Детальне дослідження задачі Коші для цих систем та властивостей їх розв'язків проведено в працях С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, М.І. Матійчука (див. огляд в [102]).

Як у параболічності за Петровським, так і за Ейдельманом, для систем (2.1) порядок системи збігається з показником параболічності. Через це запропонована $\overrightarrow{2b}$-параболічність не поширюється на всі параболічні за Шиловим системи. Тому клас Шилова і клас Ейдельмана — це два різні класи параболічних систем, кожен з яких не спроможний повністю охопити інший.

Задля уніфікації понять параболічності за Петровським, Шиловим та Ейдельманом, В.А. Літовченком в [39] було запропоновано $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічність, яка означується аналогічно до параболічності за Шиловим із заміною у співвідношеннях (2.5) і (2.7) виразу $\|\xi\|^h$ на $|\xi|_+^{\overrightarrow{h}}$. Для $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічних систем (2.1) встановлено коректну розв'язність задачі Коші із узагальненими початковими даними типу розподілів Гельфанда і Шилова та описано максимальні множини граничних значень їх розв'язків у просторах типу S [39].

Зазначимо, що означення 2.4 надто специфічне із-за умови (2.7), у зв'язку з цим, важлива інформація про багатство класу Шилова систем зі змінними коефіцієнтами, зокрема, про приклади таких систем, які не параболічні за Петровським. У наступному пункті наводяться класи параболічних систем зі змінними коефіцієнтами, наявність яких переконує, що клас Шилова систем із залежними від часу коефіцієнтами, значно ширший і багатший за клас Петровського.

Розглянемо тепер систему рівнянь (2.8) із диференціальними виразами $P_0(i\partial_x)$ і $P_1(t; i\partial_x)$ векторних порядків $\overrightarrow{p}$ і $\overrightarrow{p_1}$ відповідно. Вважатимемо, що відповідна система (2.9) на множині $\Pi_{(\tau;T]}$ $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-параболічна зі сталими коефіцієнтами й векторним показником параболічності $\overrightarrow{h}$, а коефіцієнти диференціального виразу $P_1(t; i\partial_x)$ – неперервні комплекснозначні функції, визначені на [0;T], при цьому векторні величини $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{p_1}$ і $\overrightarrow{h}$ задовольняють умову

(A'): $\quad 0 \leq p_{1j} + (p_l - h_l)(m-1) < \min(h_j; h_l) \quad \forall\{j, l\} \subset \mathbb{N}_m.$

Правильне таке твердження.

Теорема 2.2 *Система* (2.8) *із умовою* (A') – $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$*-параболічна система зі змінними коефіцієнтами й показником параболічності* $\overrightarrow{h}$.

2.3 Гіперболічні системи

2.3.1 Попередні відомості

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\partial_t u(t;x) = P(t; i\partial_x)u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{2.10}$$

в якій невідома функція $u = \mathrm{col}(u_1; \ldots; u_m)$, а $P(t; i\partial_x)$ – матричний диференціальний вираз порядку p з неперервно залежними від t комплекснозначними коефіцієнтами.

Наведемо класичні означення гіперболічності систем диференціальних рівнянь з частинними похідними. Розглянемо спочатку випадок системи (2.10) зі сталими коефіцієнтами, тобто коли $P(t; i\partial_x) \equiv P(i\partial_x)$.

Означення 2.5 *Система* (2.10) *називається гіперболічною за Петровським на множині* $\Pi_{[0;T]}$*, якщо її порядок* $p = 1$*, характеристичні числа* $\lambda_j(\cdot)$ *матричного символу* $\mathcal{P}(s)$ *при дійсних* $s = \xi$*,* $\|\xi\| = 1$*, суто уявні, а сама матриця* $\mathcal{P}(\xi)$ *зводиться до діагональної форми при всіх* $\xi \in \mathbb{R}^n$*, при цьому визначник матриці перетворення за модулем більший за деяку додатну сталу.*

Для таких систем Г.І. Петровський довів коректність задачі Коші в класі достатньо гладких функцій довільного зростання.

Означення 2.6 *Система* (2.10) *називається гіперболічною за Шиловим на множині* $\Pi_{[0;T]}$*, якщо функція* $\Lambda(s) := \max\limits_j \mathrm{Re}\lambda_j(s)$*,* $s \in \mathbb{C}^n$*, де* $\lambda_j(\cdot)$ *– характеристичні числа матриці* $\mathcal{P}(\cdot)$*, задовольняє наступні умови:*

1) її степеневий порядок зростання у комплексному просторі $\mathbb{C}^n$ *не більший за* 1*:* $\Lambda(s) \le a\|s\| + b$*;*

2) при дійсних значеннях $s = \xi \in \mathbb{R}^n$ *ця функція обмежена:* $\Lambda(\xi) \le c$*.*

У [13] встановлено, що гіперболічна за Петровським система (2.10), є також гіперболічною за Шиловим.

Клас гіперболічних за Шиловим систем досить широкий у порівнянні з класом Петровського. Умовам з означення гіперболічності за Петровським не задовольняють системи, в яких жорданова структура відповідної матриці $\mathcal{P}(\xi)$ змінюється зі зміною ξ.

Поняття гіперболічності за Шиловим поширюється і на системи (2.10) з неперервно залежними від часу t коефіцієнтами в такий спосіб.

Означення 2.7 *Говоритимемо, що система* (2.10) *гіперболічна за Шиловим на множині* $\Pi_{[0;T]}$, *якщо для матриціанта* $\Theta_\tau^t(\cdot)$ *відповідної двоїстої за Фур'є системи*

$$\partial_t v(t;\xi) = \mathcal{P}(t;\xi)v(t;\xi), \quad (t;\xi) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{2.11}$$

виконуються наступні оцінки:

1) $|\Theta_\tau^t(s)| \leq c(1+\|s\|)^{\hat{\gamma}} e^{\delta(t-\tau)\|s\|}$, $s \in \mathbb{C}^n, 0 \leq \tau < t \leq T$;

2) $|\Theta_\tau^t(\xi)| \leq c_0(1+\|\xi\|)^{\hat{\gamma}}$, $\xi \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \tau < t \leq T$

(тут c_0, c, δ *– додатні сталі, незалежні від* t *і* τ, *а* $\hat{\gamma} := p(m-1)$*).*

Зважаючи на те, що для системи (2.10) зі сталими коефіцієнтами матриціант

$$\Theta_\tau^t(\cdot) = e^{(t-\tau)\mathcal{P}(\cdot)}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

не важко переконатися у тому, що клас гіперболічних за Шиловим систем зі сталими коефіцієнтами цілком міститься в класі гіперболічних за Шиловим систем зі змінними коефіцієнтами.

З розвитком теорії узагальнених функцій метод перетворення Фур'є, який ефективно проявив себе при дослідженні параболічних систем, вдалося поширити і на випадок гіперболічних систем. У [13] методом перетворення Фур'є узагальнених функцій побудовано функцію Гріна гіперболічної системи (2.10) у вигляді

$$G(t,\tau;\cdot) = \mathbb{F}^{-1}[\Theta_\tau^t(\xi)](t,\tau;\cdot), \; 0 \leq \tau < t \leq T.$$

Досліджено властивості $G(t,\tau;\cdot)$, зокрема, обгрунтовано належність її компонент простору S_0' та доведено, що ці компоненти є згортувачами в просторі S_0 (*див.* [13, с. 69]). При цьому, одержано оцінку

$$|\Theta_\tau^t(\xi+i\eta)| \leq c(1+\|\xi\|)^\gamma e^{\delta\|\eta\|}, \;\; \xi+i\eta \in \mathbb{C}^n, 0 \leq \tau < t \leq T, \tag{2.12}$$

з $c>0$ і $\delta>0$, незалежними від t і τ. Крім цього, трактуючи розв'язок системи (2.10) у слабкому розумінні, встановлено, що простір $\mathbf{S}_0'$ розподілів Дірака є класом єдиності задачі Коші для гіперболічних за Шиловим систем, а також, у термінах показника коректності системи, описано умови гладкості на початкову функцію, за яких відповідна задача Коші має гладкий розв'язок.

У [13] також поширено відомий результат І.Г. Петровського про коректну розв'язність задачі Коші для гіперболічних за Петровським систем [115] на випадок систем, гіперболічних за Шиловим: *задача Коші лише для гіперболічних систем* (2.10) *коректно розв'язна з довільними достатньо гладкими початковими даними без будь-яких обмежень на їх зростання.*

2.3.2 Властивості функції Гріна

Правильне таке допоміжне твердження.

Лема 2.1 *Існують додатні сталі c і B такі, що для всіх $q \in \mathbb{Z}_+^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $0 \le \tau < t \le T$ виконується оцінка*

$$|\partial_\xi^q \Theta_\tau^t(\xi)| \le cB^{|q|_+}(1 + \|\xi\|)^{\hat{\gamma}}. \tag{2.13}$$

Нехай W – один із просторів типу S. Оцінка (2.13) дозволяє обргунтувати правильність наступного твердження.

Теорема 2.3 *Якщо система* (2.10) *гіперболічна за Шиловим, то відповідна функційна матриця $\Theta_\tau^t(\cdot)$, $0 \le \tau < t \le T$, – мультиплікатор у кожному векторному просторі типу S.*

Зваживши тепер на властивості перетворення Фур'є у просторах типу S, безпосередньо з теореми 2.3, одержуємо наступне твердження.

Теорема 2.4 *Функція Гріна $G(t, \tau; \cdot)$, $0 \le \tau < t \le T$, гіперболічної за Шиловим системи* (2.10) *є згортувачем у кожному векторному просторі типу S, при цьому*

$$(G * \varphi)(t, \tau; \cdot) = \mathbb{F}^{-1}[\overline{\Theta_\tau^t(\xi)}\mathbb{F}[\varphi](\xi)](t, \tau; \cdot) \quad (\forall \varphi \in \mathbf{W}).$$

Тут рискою зверху $\overline{(\cdot)}$ позначено комплексну спряженість.

2.3.3 Слабкі розв'язки в просторах типу S'

Говоритимемо, що параметрична функція $g(t; \cdot) \in W'$, $t \in [a; b]$, *слабко диференційовна* в просторі W' за параметром t у точці $t_0 \in [a; b]$, якщо для кожного елемента φ з W існує скінченна границя

$$\lim_{\triangle t \longrightarrow 0} < (g(t_0 + \triangle t; \xi) - g(t_0; \xi))/ \triangle t, \varphi(\xi) >= c_\varphi(t_0)$$

і для всіх $\varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{W} 0$ відповідні числові послідовності

$$\hat{c}_\nu(t_0) := \lim_{\triangle t \longrightarrow 0} < (g(t_0 + \triangle t; \xi) - g(t_0; \xi))/ \triangle t, \varphi_\nu(\xi) > \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

При цьому узагальнену функцію $\partial_t g(t_0; \cdot)$ з W', яка на елементах $\varphi \in W$ визначається рівністю

$$< \partial_t g(t_0; \xi), \varphi(\xi) >= c_\varphi(t_0),$$

назвемо *слабкою похідною* функції $g(t; \cdot)$ у просторі W' за параметром t у точці t_0. Функція $g(t; \cdot)$ слабко диференційовна за t на $[a; b]$ у просторі W', якщо вона слабко диференційовна за t у W' в кожній точці проміжку $[a; b]$.

Означення 2.8 *Узагальнена вектор-функція* $u(t; \cdot) \in \mathbf{W}'$, $t \in (0; T]$, *називається слабким розв'язком системи* (2.10) *у просторі* $\mathbf{W}'$, *якщо* $u(t; \cdot)$ *слабко диференційовна за* t *на* $(0; T]$ *у* $\mathbf{W}'$ *і для кожного елемента* $\varphi \in \mathbf{W}$ *виконується рівність*

$$< \partial_t u(t; x), \varphi(x) >=< P(t; i\partial_x)u(t; x), \varphi(x) > .$$

Розглянемо питання про коректну розв'язність задачі Коші для гіперболічної систем (2.10) з початковою умовою

$$u(t; \cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in \mathbf{S}_0^{\beta'}, \beta > 1, \tag{2.14}$$

яка розуміється в сенсі слабкої збіжності в просторі $\mathbf{S}_0^{\beta'}$.

Нам знадобляться наступні допоміжні твердження.

Лема 2.2 *Нехай* $\Theta_\tau^t(\cdot)$ *– матрицант системи* (2.11), *тоді функційна матриця* $\overline{\ddot{\Theta}_\tau^t}(\cdot)$ *– матрицант системи*

$$\partial_t v(t; \xi) = v(t; \xi)\overline{\ddot{\mathcal{P}}}(t; \xi),\ \xi \in \mathbb{R}^n, 0 \le \tau < t \le T$$

(тут, як і раніше, $\ddot{(\cdot)}$ *позначує операцію транспонування, а риска зверху* $\overline{(\cdot)}$ *– комплексну спряженість).*

Лема 2.3 *Для кожного* φ *з* $\mathbf{S}_0^\beta$, $\beta > 1$, *функція*

$$\psi(t; \cdot) = \ddot{G}(t, 0; \cdot) * \varphi(\cdot),\ t \in (0; T],$$

сильно диференційовна за t *на множині* $(0; T]$ *у просторі* $\mathbf{S}_0^\beta$. *При цьому функційна матриця* $\partial_t \ddot{G}(t, 0; \cdot)$ *– згортувач у* $\mathbf{S}_0^\beta$ *і справджується рівність*

$$\partial_t \psi(t; \cdot) = \partial_t \ddot{G}(t, 0; \cdot) * \varphi(\cdot),\ t \in (0; T].$$

З твердження леми 2.3 випливає очевидний

Наслідок 2.2 *Нехай $\varphi \in \mathbf{S}_\beta^0$, $\beta > 1$, тоді вираз $\overline{\ddot{\Theta}}_0^t(\cdot)\varphi(\cdot)$ – сильно диференційовний за параметром t на $(0;T]$ у просторі $\mathbf{S}_\beta^0$.*

Правильне таке твердження.

Теорема 2.5 *Нехай $f \in \mathbf{S}_0^{\beta'}$, $\beta > 1$, тоді гіперболічна система* (2.10) *у просторі $\mathbf{S}_0^{\beta'}$ має єдиний слабкий розв'язок u, який задовольняє відповідну початкову умову* (2.14) *і неперервно залежить від початкових даних з цього простору. Цей розв'язок зображується формулою*

$$u(t;x) = G(t,0;x) * f, \;\; (t;x) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Наслідок 2.3 *Кожен векторний простір $\mathbf{S}_0^{\beta'}$, $\beta > 1$, є класом коректності задачі Коші для гіперболічної за Шиловим систем* (2.10).

Приклад

Розглянемо класичне рівняння коливання необмеженої струни

$$\partial_t^2 u(t;x) = a^2 \partial_x^2 u(t;x), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \, (t;x) \in (0;T] \times \mathbb{R},$$

яке шляхом уведення функцій $u_1 = u$ і $u_2 = \partial_t u$ зводиться до гіперболічної системи (2.10) зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} \partial_t u_1(t;x) = u_2(t;x), \\ \partial_t u_2(t;x) = a^2 \partial_x^2 u_1(t;x), \;\; (t;x) \in (0;T] \times \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Матрицант відповідної двоїстої за Фур'є системи такий [13]:

$$\Theta_\tau^t(\xi) = \begin{pmatrix} \cos(a(t-\tau)\xi) & \frac{\sin(a(t-\tau)\xi)}{a\xi} \\ a\xi \sin(a(t-\tau)\xi) & \cos(a(t-\tau)\xi) \end{pmatrix}, \;\; 0 \le \tau < t \le T, \xi \in \mathbb{R}.$$

Елементи матриці $\Theta_\tau^t(\cdot)$ – мультиплікатори в кожному просторі типу S, тому існує обернене перетворення Фур'є елементів матриці $\Theta_\tau^t(\cdot)$ у кожному просторі типу S', причому

$$G(t,\tau;x) = \begin{pmatrix} \frac{\delta(x-a(t-\tau))+\delta(x+a(t-\tau))}{2} & \frac{\Theta(a(t-\tau)-|x|)}{2a} \\ \frac{a\left(\delta(x-a(t-\tau))-\delta(x+a(t-\tau))\right)_x'}{2} & \frac{\delta(x-a(t-\tau))+\delta(x+a(t-\tau))}{2} \end{pmatrix}.$$

Тут $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака, а $\Theta(\cdot)$ – тета-функція Хевісайда; обчислення $\mathbb{F}^{-1}[\Theta_\tau^t(\xi)]$ у просторі розподілів Дірака наведено в [10]. Елементи матриці $G(t,\tau;\cdot)$ – згортувачі в просторах типу S (*див.* теорему 2.3).

Для системи (2.15) задамо початкову умову

$$u_j(t;\cdot)\xrightarrow[t\to+0]{W}\varphi_j(\cdot),\ \ \varphi_j(\cdot)\in W, j\in\mathbb{N}_2, \tag{2.16}$$

в якій W – один із просторів типу S.

Як стверджується в теоремі 2.4, задача Коші (2.15), (2.16) коректно розв'язна, компоненти $u_j(t;\cdot)$ її розв'язку при кожному $t\in(0;T]$ належать простору W і мають вигляд

$$u_1(t;x)=\frac{1}{2}\Big(\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)+\frac{1}{a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi_2(\xi)d\xi\Big),$$

$$u_2(t;x)=\frac{1}{2}\Big(a\big(\varphi_1(x+at)-\varphi_1(x-at)\big)'_x+\varphi_2(x+at)-\varphi_2(x-at)\Big).$$

Зокрема, якщо $W=S_{1/2}^{1/2}$, а $\varphi_1(x)=e^{-x^2}$ і $\varphi_2(x)=2xe^{-x^2}$, то відповідна задача Коші (2.15), (2.16) у просторі $S_{1/2}^{1/2}$ має такий розв'язок:

$$u_1(t;x)=\frac{1}{2}\Big(\big(1-\frac{1}{a}\big)e^{-(x+at)^2}+\big(1+\frac{1}{a}\big)e^{-(x-at)^2}\Big),$$

$$u_2(t;x)=(1-a)(x+at)e^{-(x+at)^2}+(1+a)(x-at)e^{-(x-at)^2}.$$

Далі, для системи (2.15) у просторі $\mathbf{S}_0^{\beta'}$, $\beta>1$, розглянемо задачу Коші із початковими умовами

$$u_1(t;\cdot)\xrightarrow[t\to+0]{S_0^{\beta'}}f_{x_0}^\gamma,\ \ u_2(t;\cdot)\xrightarrow[t\to+0]{S_0^{\beta'}}|\cdot|', \tag{2.17}$$

в яких

$$f_{x_0}^\gamma(\cdot)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k}{k^{\gamma k}}\delta^{(k)}(\cdot-x_0)$$

– узагальнена функція з $S_0^{\beta'}$ з фіксованими параметрами $x_0\in\mathbb{R}$ та $\gamma>\beta$ (зазначимо, що $f_{x_0}^\gamma\notin S_0'$).

Згідно з твердженням теореми 2.5, задача Коші (2.15), (2.17) коректно розв'язна в просторі $\mathbf{S}_0^{\beta'}$, її слабким розв'язком є

$$u_1(t;x)=\frac{1}{2a}\Theta(at-|x|)*|x|'+\frac{1}{2}\big(\delta(x-at)+\delta(x+at)\big)*f_{x_0}^\gamma,$$

$$u_2(t;x) = \frac{1}{2}\big(\delta(x-at)+\delta(x+at)\big) * |x|' + \frac{a}{2}\big(\delta(x-at)-\delta(x+at)\big)'_x * f^{\gamma}_{x_0},$$

або, що те саме,

$$u_1(t;x) = \frac{1}{2a}\big(|x+at|-|x-at|\big)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\gamma k}}\big(\delta(x-x_0-at)+\delta(x-x_0+at)\big)^{(k)}_x,$$

$$u_2(t;x) = \frac{1}{2}\big(|x-at|+|x+at|\big)'_x+\frac{a}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\gamma k}}\big(\delta(x-x_0-at)-\delta(x-x_0+at)\big)^{(k+1)}_x.$$

Висновки до розділу

Означено класи параболічних систем рівнянь із частинними похідними, що характеризують багатство класу Шиловим систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами та класу $\{\vec{p},\vec{h}\}$-параболічних систем.

Обгрунтовано параболічну стійкість цих систем стосовно зміни своїх коефіцієнтів.

Одержано загальні оцінки фундаментального розв'язку задачі Коші та його похідних для систем з цих класів не використовуючи поняття роду системи.

Для гіперболічних за Шиловим систем:

- досліджено основні властивості функції Гріна в просторах типу S і S';

- сформульовано поняття слабкого розв'язку задачі Коші в просторах розподілів Гельфанда і Шилова;

- розширено клас єдиності S_0' Гельфанда і Шилова для таких систем до просторів $S_0^{\beta\,\prime}$, $\beta > 1$, і доведено, що ці розширення є класами коректності;

- одержані результати проілюстровано на прикладі рівняння коливання необмеженої струни.

Результати цього розділу одержані В.А. Літовченком одноосібно; опубліковані в [44, 45, 46, 47, 48, 107].

Розділ 3

ЗАДАЧІ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

У цьому розділі розглядається задача Коші, Діріхле, задача зі скісною похідною та одностороння крайова задача для параболічного рівняння другого порядку з імпульсною дією за часовою змінною. Коефіцієнти рівняння мають степеневі особливості довільного порядку як за часовою, так і за просторовими змінними на деякій множині точок. За допомогою принципа максимуму та апріорних оцінок доводиться існування та єдиність розв'язків поставлених задач в гельдерових просторах зі степеневою вагою.

3.1 Вступ

Задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними та для інтегродиференціальних рівнянь виникають при моделюванні різних явищ і процесів природознавства, фізики, техніки, економіки, біології та екології. В залежності від структури середовищапроцеси дифузії, термоелектропружності, теплопровідності моделюються диференціальними рівняннями параболічного типу. При цьому рівняння і крайові умови мають некласичні обмеження, різні виродження та імпульсні впливи.

Задачі, які виникають у кінетичній теорії газу, теорії дифузійних процесів, коливань, соле-та вологопереносу в грунтах, фізиці плазми, математичній біології, при вивченні руху матеріальних точок у полі сил приводять до розв'язання рівнянь з виродженням.

Поряд із розвитком теорії крайових задач інтенсивно розвивається теорія задач з імпульсною дією. Одержані результати А.М. Самойленком М.О. Перестюком [124] для систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією використані М.І. Матійчуком та його учнями при вивченні задач Коші для параболічних рівнянь вищого порядку з імпульсною дією, задач для псевдодиференціальних рівнянь вищого порядку з імпульсним впливом за часовою змінною. Ними побудовано та встановлено умови існування розв'язку крайових задач та крайових задач без початкових умов для сингулярних параболічних систем, досліджено властивості розв'язків цих систем в обмеженнях за часовою змінною областях.

Теорія оптимального керування системами, що описується рівняннями з частинними похідними, багата результатами і активно розвивається в наш час. Популярність такого роду досліджень пов'язана з їх активним використанням при вирішенні проблем природознавства, зокрема гідро і газодинаміки, фізики тепла, фільтрації, дифузії, плазми, теорії біологічних популяцій. Основи теорії оптимального керування детермінованими системами, що описуються рівняннями з частинними похідними вперше систематично описано в монографії Ж.-Л. Ліонса.

3.2 Задача Діріхле

3.2.1 Попередні відомості. Постановка задачі

Нехай D – довільна обмежена область з простору $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область, $\overline{\Omega} \subset D$, $\dim \Omega \leq n-1$, а L – диференціальний вираз вигляду

$$L = \partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x).$$

В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(x,t)$, яка при $t \neq t_\lambda$, $\lambda \in \{1,2,...,N\}$, $t \neq \eta$, $\eta \neq t_\lambda$ $x \in D \setminus \overline{\Omega}$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = f(t,x), \tag{3.1}$$

умови за змінною t

$$u(t_0,x) = \varphi_0(x), \tag{3.2}$$

$$u(t_\lambda + 0, x) - u(t_\lambda - 0, x) = b_\lambda(x)u(t_\lambda - 0, x) + \varphi_\lambda(x) \tag{3.3}$$

та крайову умову

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D}[u(t,x) - g(t,x)] = 0, \tag{3.4}$$

де $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N < t_{N+1}$, $t_0 < \eta < t_{N+1}$.

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (3.1) і крайової умови (3.4) у точці $P(t,x)=Q\setminus Q_{(0)}$ будуть характеризувати функції $e_1(\gamma_i^{(1)},t)$, $e_2(\gamma_i^{(2)},x)$:

$$e_1(\gamma_i^{(1)},t)=\begin{cases}|t-\eta|^{\gamma_i^{(1)}}, & \text{якщо } |t-\eta|\le 1;\\ 1, & \text{якщо } |t-\eta|\ge 1,\end{cases}$$

$$e_2(\gamma_i^{(2)},x)=\begin{cases}\rho^{\gamma_i^{(2)}}(x), & \text{якщо } \rho(x)\le 1;\\ 1, & \text{якщо } \rho(x)\ge 1,\end{cases}$$

$\rho(x)=\inf\limits_{z\in\overline{\Omega}}|x-z|$, $\gamma_i^{(\nu)}\in(-\infty,\infty)$, $\nu\in\{1,2\}$, $\gamma^{(\nu)}=(\gamma_1^{(\nu)},\dots,\gamma_n^{(\nu)})$, $\gamma=(\gamma^{(1)},\gamma^{(2)})$, $Q_{(0)}=\{(t,x)|t=\eta,x\in D\}\cup\{(t,x)|t\in[t_0,t_{N+1}),x\in\overline{\Omega}\}$.

Позначимо через $Q^{(k)}=[t_k,t_{k+1})\times D$, $\Gamma^{(k)}=[t_k,t_{k+1})\times\partial D$ $k\in\{0,1,\dots N\}$, числа l, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $\beta^{(1)}$, $\beta^{(2)}$, $\mu_j^{(1)}$, $\mu_j^{(2)}$ – дійсні числа, $q^{(\nu)}\ge 0$, $\beta^{(\nu)}\ge 0$, $l\ge 0$, $\mu_j^{(\nu)}\ge 0$, $j\in\{0,1,\dots,n\}$, $[l]$ – ціла частина числа l, $\{l\}=l-[l]$, $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(1)})$, $R_i(t^{(2)},x^{(2)})$ – довільні точки із $Q^{(k)}$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$, $x^{(1)}=(x_1^{(1)},\dots,x_i^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)}=(x_1^{(1)},\dots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)}\dots,x_n^{(1)})$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (3.1) – (3.4):

$H^l(\beta;\gamma;q;Q)$ - множина функцій u, які мають неперервні похідні в $Q^{(k)}\setminus Q^{(0)}$ при $t\ne t_\lambda$ вигляду $\partial_t^s\partial_x^r$, $2s+|r|\le[l]$, для яких скінченна норма

$$||u;\beta;\gamma;0;Q||_0=\sup_k\{\sup_{\overline{Q}^{(k)}}|u|\}\equiv||u;Q||_0,$$

$$||u;\beta;\gamma;q;Q||_l=\sup_k\Big\{\sum_{2s+|r|\le[l]}||u;\beta;\gamma;q;Q^{(k)}||_{2s+|r|}+\langle u;\beta;\gamma;q;Q^{(k)}\rangle_l\Big\}\equiv$$

$$\equiv\sup_k\Big\{\sum_{2s+|r|\le[l]}\sup_{P\in\overline{Q}^{(k)}}[e_1(q^{(1)},t)e_1((2s+|r|)\beta^{(1)},t)e_2(q^{(2)},x)e_2(2s\beta^{(2)},x)\times$$

$$\times|\partial_t^s\partial_x^r u(P)|\prod_{i=1}^n e_1(-r_i\gamma_i^{(1)},t)e_2(r_i(\beta^{(2)}-\gamma_i^{(2)}),x)\Big\}+$$

$$+\sup_k\sum_{2s+|r|=[l]}\Big\{\sum_{\nu=1}^n[\sup_{(P_2R_\nu)\subset\overline{Q}^{(k)}}[e_1(q^{(1)},t^{(2)})e_1([l]\beta^{(1)},t^{(2)})e_2(q^{(2)},\widetilde{x})e_2(2s\beta^{(2)},\widetilde{x})\times$$

$$\times\prod_{i=1}^n e_1(-r_i\gamma_i^{(1)},t^{(2)})e_2(r_i(\beta^{(2)}-\gamma_i^{(2)}),\widetilde{x})|\partial_t^s\partial_x^r u(P_2)-\partial_t^s\partial_x^r u(R_\nu)||x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}|^{-\{l\}}\times$$

$$\times e_1(\{l\}\gamma_\nu^{(1)},t^{(2)})e_2(\{l\}(\beta^{(2)}-\gamma_\nu^{(2)}),\widetilde{x})]+\sup_{(P_1P_2)\subset\overline{Q}^{(k)}}[e_1(q^{(1)},\widetilde{t})e_1(l\beta^{(1)},\widetilde{t})\times$$

$$\times e_2(q^{(2)},x^{(1)})e_2((2s+\{l\})\beta^{(2)},x^{(1)})\prod_{i=1}^n e_1(-r_i\gamma_i^{(1)},\widetilde{t})e_2(r_i(\beta^{(2)}-\gamma_i^{(2)}),x^{(1)})\times$$

$$\times|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\{\frac{l}{2}\}}|\partial_t^s\partial_x^r u(P_1)-\partial_t^s\partial_x^r u(P_2)|\ ]\Big\},$$

де $|r|=r_1+\dots+r_n$ і

$$e_1(q,\widetilde{t})=\min(e_1(q,t^{(1)}),e_1(q,t^{(2)})),\quad e_2(q,\widetilde{x})=\min(e_2(q,x^{(1)}),e_2(q,x^{(2)})).$$

Дослідження задач (3.1) – (3.4) будемо проводити за таких умов:

а) для довільного вектора $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ і $(t,x)\in Q\backslash Q_{(0)}$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2\le\sum_{i=1}^n e_1(\gamma_i^{(1)},t)e_1(\gamma_j^{(1)},t)e_2(\gamma_i^{(2)},x)e_2(\gamma_j^{(2)},x)A_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j\le\pi_2|\xi|^2,$$

де π_1,π_2 – фіксовані додатні сталі, крім цього, припускатимемо, що $e_1(\mu_i^{(1)},t)e_2(\mu_i^{(2)},x)A_i\in H^\alpha(\beta;\gamma;0;Q)$, $e_1(\mu_0^{(1)},t)e_2(\mu_0^{(2)},x)A_0\in H^\alpha(\beta;\gamma;0;Q)$, $A_0>0$, $e_1(\gamma_i^{(1)},t)e_1(\gamma_j^{(1)},t)\times$ $e_2(\gamma_i^{(2)},x)e_2(\gamma_j^{(2)},x)A_{ij}\in H^\alpha(\beta;\gamma;0;Q)$, $\Gamma=[t_0,t_{N+1})\times\partial D$, $\partial D\in C^{2+\alpha}$;

б) $f\in H^\alpha(\beta;\gamma;\mu_0;Q)$, $\varphi_0\in H^{2+\alpha}(\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};0;D)$, $\widetilde{\beta}=(0,\beta^{(2)})$, $\widetilde{\gamma}=(0,\gamma^{(2)})$, $\varphi_\lambda\in H^{2+\alpha}(\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};0;Q\cap(t=t_\lambda))$, $b_\lambda\in C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_\lambda))$, $g\in H^{2+\alpha}(\beta;\gamma;0;Q^{(\lambda)})$, $g(t_\lambda+0,x)-g(t_\lambda-0,x)=b_\lambda(t_\lambda,x)g(t_\lambda-0,x)+\varphi_\lambda(t_\lambda-0,x)$ для $x\in\Gamma\cap(t=t_\lambda)$, $\beta^{(\nu)}=\max\{\max_i(1+\gamma_i^{(\nu)}),\max_i(\mu_i^{(\nu)}-\gamma_i^{(\nu)}),\frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}\}$, $\nu\in\{1,2\}$.

Для дослідження задачі (3.1)–(3.4) побудуємо послідовність розв'язків задач з гладкими коефіцієнтами. З множини отриманих розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (3.1)–(3.4).

3.2.2 Оцінка розв'язку

Нехай $m=(m_1,m_2)$, $m_1>1$, $m_2>1$,

$$Q_m^{(k)}=Q^{(k)}\cap\{(t,x)\in Q^{(k)}\mid e_1(1,t)\ge m_1^{-1},e_2(1,x)\ge m_2^{-1}\}$$

– послідовності областей, які при $m_1\longrightarrow\infty$, $m_2\longrightarrow\infty$ збігаються до $Q^{(k)}$, а

$$L_1\equiv\partial_t-\sum_{ij=1}^n a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+\sum_{i=1}^n a_i(t,x)\partial_{x_i}+a_0(t,x).$$

Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій $u_m(t,x)$, які при $t \neq t_\lambda$ задовольняють рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x), \tag{3.5}$$

умови за змінною t

$$u_m(t_0+0,x) = \varphi_m^{(0)}(x), \tag{3.6}$$

$$u_m(t_\lambda+0,x) - u_m(t_\lambda-0,x) = b_\lambda(t_\lambda,x)u_m(t_\lambda-0,x) + \varphi_m^{(\lambda)}(t_\lambda,x) \tag{3.7}$$

і крайову умову

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}[u_m(t,x) - g_m(t,x)] = 0. \tag{3.8}$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, а також функції f_m, $\varphi_m^{(0)}$, $\varphi_m^{(\lambda)}$, g_m в областях $Q_m^{(k)}$ співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, f, φ_0, φ_λ, g, відповідно, а в областях $Q^{(k)}\backslash Q_m^{(k)}$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, і функцій f, φ_0, φ_λ, g, із областей $Q_m^{(k)}$ в області $Q^{(k)}\backslash Q_m^{(k)}$ із збереженням гладкості і норми [84, с. 82].

Теорема 3.1 *Нехай в області Q виконані умови а), б) і $u_m(t,x)$ – класичний розв'язок задачі* (3.5)–(3.8). *Тоді для $u_m(t,x)$ правильна така оцінка:*

$$|u_m(t,x)| \leq \sum_{k=1}^{N}\Big(\prod_{\lambda=k}^{N}(1+||b_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)||_0)\times$$

$$\times(||\varphi_m^{(k-1)};Q^{(k-1)}\cap(t=t_{k-1})||_0 + ||f_m a_0^{-1};Q^{(k-1)}||_0 + ||g_m;Q^{(k-1)}||_0)\Big)+$$

$$+||\varphi_m^{(N)};Q\cap(t=t_N)||_0 + ||f_m a_0^{-1};Q^{(N)}||_0 + ||g_m;Q^{(N)}||_0. \tag{3.9}$$

3.2.3 Інтерполяційні нерівності

У просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ введемо норму $||u_m;\beta;\gamma;q;Q||_l$, еквівалентну при фіксованих m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка виражається так само, як і $||u;\beta;\gamma;q;Q||_l$, тільки замість функцій $e_1(q^{(1)},t)$, $e_2(q^{(2)},x)$ покладемо відповідно $d_1(q^{(1)},t)$, $d_2(q^{(2)},x)$.

Маємо

$$\|u_m;\beta;\gamma;q;Q\|_{2+\alpha} = \sup_k(\|u_m;\beta;\gamma;q;Q^{(k)}\|_{t,1+\frac{\alpha}{2}} + \|u_m;\beta;\gamma;q;Q^{(k)}\|_{x,2+\alpha}),$$

де, наприклад,

$$\|u_m;\beta;\gamma;q;Q^{(k)}\|_{t,1+\frac{\alpha}{2}} = \sup_{\overline{P}\in Q^{(k)}}|u_m(P)| + \sup_{\overline{P}\in Q^{(k)}}(d_1(2\beta^{(1)},t)d_1(q^{(1)},t)d_2(q^{(2)},x)\times$$

$$\times d_2(2\beta^{(2)},x)|\partial_t u_m(P)|)+\sup_{(P_1,P_2)\subset Q^{(k)}}\{d_1((2+\alpha)\beta^{(1)},t)d_1(q^{(1)},t)d_2(q^{(2)},\widetilde{x})\times$$

$$\times d_2((2+\alpha)\beta^{(2)},\widetilde{x})|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}}|\partial_t u_m(P_1)-\partial_t u_m(P_2)|\}\equiv$$

$$\equiv\|u_m;Q^{(k)}\|_0+\|u_m;\beta;\gamma;q;Q^{(k)}\|_{t,1}+\langle u_m;\beta;\gamma;q;Q^{(k)}\rangle_{t,1+\alpha}.$$

$$\|u_m;\beta;\gamma;q;Q^{(k)}\|_{2+\alpha}=\sup_{P\in\overline{Q}^{(k)}}|u_m(P)|+\sup_{P\in\overline{Q}^{(k)}}\sum_{i=1}^{n}(d_1(q^{(1)},t)d_1(\beta^{(1)}-\gamma_i^{(1)},t)\times$$

$$\times d_2(q^{(2)},x)d_2(\beta^{(2)}-\gamma_i^{(2)},x)|\partial_{x_i}u_m(P)|)+\sup_{P\in\overline{Q}^{(k)}}\sum_{ij=1}^{n}(d_1(\beta^{(1)}-\gamma_i^{(1)},t)d_1(q^{(1)},t)\times$$

$$\times d_1(\beta^{(1)}-\gamma_j^{(1)},t)d_2(q^{(2)},x)d_2(\beta^{(1)}-\gamma_i^{(1)},x)d_2(\beta^{(1)}-\gamma_j^{(1)},x)|\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(P)|)+$$

$$+\sup_{(P_2,R_\nu)\in\overline{Q}^{(k)}}\sum_{ij=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}d_1(q^{(1)},\widetilde{t})d_2(q^{(2)},\widetilde{x})d_1(\beta^{(1)}-\gamma_i^{(1)},\widetilde{t})d_1(\beta^{(1)}-\gamma_j^{(1)},\widetilde{t})\times$$

$$\times d_2(\beta^{(2)}-\gamma_i^{(2)},\widetilde{x})d_2(\beta^{(2)}-\gamma_j^{(2)},\widetilde{x})d_1(\alpha(\beta^{(1)}-\gamma_\nu^{(1)}),\widetilde{t})d_2(\alpha(\beta^{(2)}-\gamma_\nu^{(2)}),\widetilde{x})\times$$

$$\times|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}|^{-\alpha}|\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(P_2)-\partial_{x_i}\partial_{x_j}u_m(R_\nu)|=\|u_m;Q^{(k)}\|_0+$$

$$+\|u_m;\beta;\gamma;q;Q^{(k)}\|_{x,1}+\|u_m;\beta;\gamma;q;Q^{(k)}\|_{x,2}+\langle u_m;\beta;\gamma;q;Q^{(k)}\rangle_{x,2+\alpha}.$$

Правильне таке допоміжне твердження.

Лема 3.1 *Нехай $u_m\in H^{2+\alpha}(\beta;\gamma;0;Q)$. Справедливі нерівності*

$$\|u_m;\beta;\gamma;0;Q\|_1\le\varepsilon^{1+\alpha}\langle u_m;\beta;\gamma;0;Q\rangle_{t,\,1+\alpha}+c(\varepsilon)\|u_m;Q\|_0,$$

$$\|u_m;\beta;\gamma;0;Q\|_2\le\varepsilon^{\alpha}\langle u_m;\beta;\gamma;0;Q\rangle_{x,\,2+\alpha}+c(\varepsilon)\|u_m;Q\|_0,$$

ε – будь-яке додатне число, $\varepsilon\in(0;1)$, c – стала, яка залежить від ε.

3.2.4 Умови існування розв'язку

Наступні твердження характеризують коректну розв'язність задачі Діріхле.

Теорема 3.2 *Якщо виконані умови а), б), то для задачі* (3.5) – (3.8) *правильна оцінка*

$$\|u_m;\beta;\gamma;0;Q\|_{2+\alpha}\le c\Bigg\{\sum_{k=1}^{N}\Big\{\prod_{\lambda=k}^{N}(1+\|b_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_\lambda))})\times$$

$$\times(\|\varphi_m^{(k-1)};\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};0;Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}+\|f_m;\beta;\gamma;\mu_0;Q^{(k-1)}\|_{\alpha}+$$

$$+\|g_m;\beta;\gamma;\delta;Q^{(k-1)}\|_{2+\alpha})\Big\} + \|\varphi_m^{(N)};\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};0;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|f_m;\beta;\gamma;\mu_0;Q^{(N)}\|_\alpha + \|g_m;\beta;\gamma;0;Q^{(N)}\|_{2+\alpha}\Bigg\}. \qquad (3.10)$$

Теорема 3.3 *Нехай для задачі* (3.1)–(3.4) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (3.1)–(3.4) *із простору* $H^{2+\alpha}(\beta;\gamma;0;Q)$ *і справджується нерівність*

$$||u;\beta;\gamma;0;Q||_{2+\alpha} \le c\Big\{\sum_{k=1}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}(1+\|b_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)\|_0)\times$$

$$\times(||\varphi_{k-1};\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};0;Q\cap(t=t_{k-1})||_{2+\alpha} + ||f;\beta;\gamma;\mu_0;Q^{(k-1)}||_\alpha+$$

$$+||g;\beta;\gamma;0;Q^{(k-1)}||_{2+\alpha}) + ||\varphi_N;\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};0;Q\cap(t=t_N)||_{2+\alpha}+$$

$$+||f;\beta;\gamma;\mu_0;Q^{(N)}||_\alpha + ||g;\beta;\gamma;0;Q^{(N)}||_{2+\alpha}\Big\}. \qquad (3.11)$$

3.3 Існування розв'язку задачі зі скісною похідною

Нехай $\eta, t_0, t_1, ..., t_N, t_{N+1}$ – фіксовані числа, $0 \le t_0 < ... < t_{N+1}$, $t_0 < \eta < t_{N+1}$, $\eta \ne t_\lambda$, $\lambda \in \{1,2,...,N\}$, D – обмежена область в R^n з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область, $\overline{\Omega} \subset D$, $\dim\Omega \le n-1$. Позначимо через $Q_{(0)} = \{(t,x)|t\in[t_0,t_{N+1}), x\in\Omega\} \cup \{(t,x)|t=\eta, x\in D\}$, $Q^{(k)} = [t_k,t_{k+1})\times D, k \in \{0,1,...,N\}$.

В області $Q = [t_0,t_{N+1})\times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(x,t)$, яка задовольняє при $t\ne t_\lambda$, $(t,x)\notin Q_{(0)}$ рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_ix_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\Big]u(t,x) = f(t,x), \qquad (3.12)$$

умови за змінною t

$$u(t_0+0,x) = \varphi_0(x), \qquad (3.13)$$

$$u(t_\lambda+0,x) - u(t_\lambda-0,x) = \psi_\lambda(x)u(t_\lambda-0,x) + \varphi_\lambda(x) \qquad (3.14)$$

і крайову умову

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}(Bu-g)(t,x) \equiv$$

$$\equiv \lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} \Big[\sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) \partial_{x_i} u + b_0(t,x) u - g(t,x) \Big] = 0. \qquad (3.15)$$

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (3.12) і крайової умови (3.15) у точці $P(t,x) = Q \setminus Q_{(0)}$ характеризуватимуть функції $e_1(\gamma_i^{(1)}, t)$, $e_2(\gamma_i^{(2)}, x)$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (3.12)–(3.15). Позначимо через $H^l(\beta; \gamma; \delta; q; Q)$ множину функцій простору $H^l(\beta; \gamma; q; Q)$, для яких $\beta^{(\nu)} = \max\{\max_i (1 + \gamma_i^{(\nu)}), \max_i (\mu_i^{(\nu)} - \gamma_i^{(\nu)}), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}, \delta^{(\nu)}\}$.

Вважаємо, що для задачі (3.12) – (3.15) виконані такі умови:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\forall (t,x) \in Q \backslash Q_{(0)}$ виконується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} e_1(\gamma_i^{(1)}, t) e_1(\gamma_j^{(1)}, t) e_2(\gamma_i^{(2)}, x) e_2(\gamma_j^{(2)}, x) A_{ij}(t,x) \xi_i \xi_j \leq \pi_2 |\xi|^2,$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі та $e_1(\mu_i^{(1)}, t) e_2(\mu_i^{(2)}, x) A_i \in H^\alpha(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, $e_1(\mu_0^{(1)}, t) e_2(\mu_0^{(2)}, x) A_0 \in H^\alpha(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, $A_0 \geq -a$, $a > 0$, $e_1(\delta^{(1)}, t) e_2(\delta^{(2)}, x) b_0 \in H^{1+\alpha}(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, $e_1(\gamma_i^{(1)}, t) e_1(\gamma_j^{(1)}, t) e_2(\gamma_i^{(2)}, x) e_2(\gamma_j^{(2)}, x) A_{ij} \in H^\alpha(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, $e_1(\gamma_i^{(1)}, t) e_2(\gamma_i^{(2)}, x) b_i \in H^{1+\alpha}(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, вектори $\overrightarrow{b}^{(e)} = \{b_1^{(e)}, \ldots, b_n^{(e)}\}$, $b_i^{(e)} = e_1(\gamma_i^{(1)}, t) e_2(\gamma_i^{(2)}, x) b_i$ і $\overrightarrow{s} = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $s_i = b_i (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{-\frac{1}{2}}$ утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\overrightarrow{n}$ до ∂D в точці $P(t,x) \in \Gamma$ кут менший за $\frac{\pi}{2}$, $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$, $b_0(t,x)\Big|_{\Gamma} > 0$;

б) $f \in H^\alpha(\beta; \gamma; \delta; \mu_0; Q)$, $\varphi_0 \in H^{2+\alpha}(\widetilde{\beta}; \widetilde{\gamma}; \delta; 0; D)$, $\widetilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)})$, $\widetilde{\beta} = (0, \beta^{(2)})$, $\varphi_\lambda \in H^{2+\alpha}(\widetilde{\beta}; \widetilde{\gamma}; \delta; 0; Q \cap (t = t_\lambda))$, $\psi_\lambda \in C^{2+\alpha}(Q \cap (t = t_\lambda))$, $g \in H^{1+\alpha}(\beta; \gamma; \delta; \delta; Q^{(\lambda)})$, $g(t_\lambda + 0, x) - g(t_\lambda - 0, x) = \psi_\lambda(x) g(t_\lambda - 0, x) + B\varphi_\lambda(x)$ для $x \in \Gamma \cap (t = t_\lambda)$, $B\varphi_0(x) = g(t_0, x)$, $x \in \partial D$, $\lim\limits_{x \longrightarrow z \in \partial D} \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(t_\lambda, x) \partial_{x_i} \psi_\lambda(x) = 0$, $\partial D \in C^{2+\alpha}$, $\beta^{(\nu)} = \max\{\max_i (1 + \gamma_i^{(\nu)}), \max_i (\mu_i^{(\nu)} - \gamma_i^{(\nu)}), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}, \delta^{(\nu)}\}$.

Встановимо оцінку розв'язку задачі (3.12) – (3.15).

Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій $u_m(t,x)$, які задовольняють при $t \neq t_\lambda$ рівняння

$$(L_1u_m)(t,x) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} + a_0(t,x)\Big]u_m = f_m(t,x), \tag{3.16}$$

умови за змінною t

$$u_m(t_0+0,x) = \varphi_m^{(0)}(x), \tag{3.17}$$

$$u_m(t_\lambda+0,x) - u_m(t_\lambda-0,x) = \psi_m^{(\lambda)}(x)u_m(t_\lambda-0,x) + \varphi_m^{(\lambda)}(x) \tag{3.18}$$

і крайову умову

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}(B_1u_m - g_m)(t,x) =$$

$$= \lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}\Big[\sum_{i=1}^{n} h_i(t,x)\partial_{x_i}u_m + h_0(t,x)u_m - g_m(t,x)\Big] = 0. \tag{3.19}$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0, а також функції f_m, $\varphi_m^{(0)}$, $\varphi_m^{(\lambda)}$, g_m в областях $Q_m^{(k)}$ співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0, f, φ_0, φ_λ, g, відповідно, а в областях $Q^{(k)}\setminus Q_m^{(k)}$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0, і функцій f, φ_0, φ_λ, g, із областей $Q_m^{(k)}$ в області $Q^{(k)}\setminus Q_m^{(k)}$ із збереженням гладкості і норми [84, с. 82] .

У просторі $C^l(Q)$ введемо норму $||u_m;\beta;\gamma;\delta;q;Q||_l$, еквівалентну при фіксованих m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка виражається так само, як і $||u;\beta;\gamma;\delta;q;Q||_l$, тільки замість функцій $e_1(q^{(1)},t)$, $e_2(q^{(2)},x)$ беремо відповідно $d_1(q^{(1)},t)$, $d_2(q^{(2)},x)$, де $d_1(q^{(1)},t) = \max(e_1(q^{(1)},t), m_1^{-q^{(1)}})$ при $q^{(1)} \geq 0$ і $d_1(q^{(1)},t) = \min(e_1(q^{(1)},t), m_1^{-q^{(1)}})$ при $q^{(1)} < 0$; $d_2(q^{(2)},x) = \max(e_2(q^{(2)},x), m_2^{-q^{(2)}})$ при $q^{(2)} \geq 0$ і $d_2(q^{(2)},x) = \min(e_2(q^{(2)},x), m_2^{-q^{(2)}})$ при $q^{(2)} < 0$.

Для задачі (3.16)–(3.19) правильні такі твердження.

Теорема 3.4 *Нехай $u_m(t,x)$ – класичний розв'язок задачі* (3.16)–(3.19) *в області Q і виконані умови а), б). Тоді для $u_m(t,x)$ правильна оцінка*

$$|u_m(t,x)| \leq \sum_{k=1}^{N}\Big\{\prod_{\lambda=k}^{N}(1+||\psi_m^{(\lambda)};Q\cap(t=t_\lambda)||_0)(||\varphi_m^{(k-1)};Q\cap(t=t_{k-1})||_0+$$

$$+||f_ma_0^{-1};Q^{(k-1)}||_0 + ||g_mh_0^{-1};Q^{(k-1)}||_0)\Big\} + ||\varphi_m^{(N)};Q\cap(t=t_N)||_0+$$

$$+||f_ma_0^{-1};Q^{(N)}||_0 + ||g_mh_0^{-1};Q^{(N)}||_0. \tag{3.20}$$

Теорема 3.5 *Якщо виконані умови а), б), то для розв'язку задачі* (3.16) – (3.19) *правильна оцінка*

$$||u_m;\beta;\gamma;\delta;0;Q||_{2+\alpha}\le c\Big\{\sum_{k=1}^{N}\Big\{\prod_{\lambda=k}^{N}(1+||\psi_\lambda||_{C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_\lambda))})\times$$

$$\times(||\varphi_{k-1};\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};\delta;0;Q\cap(t=t_{k-1})||_{2+\alpha}+||f;\beta;\gamma;\delta;\mu_0;Q^{(k-1)}||_\alpha+$$

$$+||g;\beta;\gamma;\delta;\delta;Q^{(k-1)}||_{1+\alpha})\Big\}+||\varphi_N;\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};\delta;0;Q\cap(t=t_N)||_{2+\alpha}+$$

$$+||f;\beta;\gamma;\delta;\mu_0;Q^{(N)}||_\alpha+||g;\beta;\gamma;\delta;\delta;Q^{(N)}||_{1+\alpha}\Big\}. \quad (3.21)$$

Теорема 3.6 *Нехай для задачі* (3.12)–(3.15) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (3.12)–(3.15) *із простору* $H^{2+\alpha}(\beta;\gamma;\delta;0;Q)$ *і справджується нерівність*

$$||u;\beta;\gamma;\delta;0;Q||_{2+\alpha}\le c\Big\{\sum_{k=1}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}(1+\|\psi_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_\lambda))})\times$$

$$\times(||\varphi_{k-1};\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};\delta;0;Q\cap(t=t_{k-1})||_{2+\alpha}+||f;\beta;\gamma;\delta;\mu_0;Q^{(k-1)}||_\alpha+$$

$$+||g;\beta;\gamma;\delta;\delta;Q^{(k-1)}||_{1+\alpha})+||\varphi_N;\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};\delta;0;Q\cap(t=t_N)||_{2+\alpha}+$$

$$+||f;\beta;\gamma;\delta;\mu_0;Q^{(N)}||_\alpha+||g;\beta;\gamma;\delta;\delta;Q^{(N)}||_{1+\alpha}\Big\}. \quad (3.22)$$

3.4 Існування розв'язку односторонньої крайової задачі

Розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$ в області $Q=[t_0,t_{N+1})\times D$, яка при $t\neq t_\lambda$, $(t,x)\notin Q_{(0)}$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x)\equiv\Big[\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}A_i(t,x)\partial_{x_i}+A_0(t,x)\Big]u(t,x)=f(t,x), \quad (3.23)$$

умову за змінною t

$$u(t_0+0,x)=\varphi_0(x), \quad (3.24)$$

$$u(t_\lambda+0,x)-u(t_\lambda-0,x)=\psi_\lambda(x)u(t_\lambda-0,x)+\varphi_\lambda(x), \quad (3.25)$$

а на бічній межі $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$ крайову умову

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} (Bu - g)(t,x) \equiv \lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} \Big[\sum_{k=1}^{n} b_k(t,x) \partial_{x_k} u + b_0(t,x) u - g(t,x) \Big] \geq 0, \tag{3.26}$$

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} u \geq 0, \quad \lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} [u(Bu - g)](t,x) = 0. \tag{3.27}$$

Степеневі особливості коефіцієнтів диференціальних виразів L і B у точці $P(t,x) \in Q \backslash Q_{(0)}$ характеризуватимуть функції $e_1(\gamma_i^{(1)}, t)$, $e_2(\gamma_i^{(2)}, x)$. Задачу (3.23) – (3.25) будемо вивчати в просторі $H^l(\beta; \gamma; \delta; q; Q)$.

Позначимо через $\Gamma^{(1)}$ множину точок межі Γ, в яких виконується умова

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} u(t,x) = 0.$$

Тоді з крайової умови (3.27) випливає, що в точках $\Gamma^{(2)} = \Gamma \backslash \Gamma^{(1)}$ буде виконуватись умова

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} (Bu - g)(t,x) = 0.$$

Нехай для задачі (3.23)–(3.25) виконуються умови:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\forall (t,x) \in Q \backslash Q_{(0)}$ виконується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(t,x) e_1(\gamma_i^{(1)}, t) e_1(\gamma_j^{(1)}, t) e_2(\gamma_i^{(2)}, x) e_2(\gamma_j^{(2)}, x) \xi_i \xi_j \leq \pi_2 |\xi|^2, \tag{3.28}$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі та $e_1(\mu_i^{(1)}, t) e_2(\mu_i^{(2)}, x) A_i \in H^\alpha(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, $e_1(\mu_0^{(1)}, t) e_2(\mu_0^{(2)}, x) A_0 \in H^\alpha(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, $A_0 \geq 0$, $e_1(\delta^{(1)}, t) e_2(\delta^{(2)}, x) b_0 \in H^{1+\alpha}(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, $e_1(\gamma_i^{(1)}, t) e_1(\gamma_j^{(1)}, t) e_2(\gamma_i^{(2)}, x) e_2(\gamma_j^{(2)}, x) A_{ij} \in H^\alpha(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, $e_1(\gamma_i^{(1)}, t) e_2(\gamma_i^{(2)}, x) b_i \in H^{1+\alpha}(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, вектори $\overrightarrow{b}^{(e)} = \{b_1^{(e)}, \ldots, b_n^{(e)}\}$, $b_i^{(e)} = e_1(\gamma_i^{(1)}, t) e_2(\gamma_i^{(2)}, x) b_i$ і $\overrightarrow{s} = \{s_1, \ldots, s_n\}$, $s_i = b_i (\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2)^{-\frac{1}{2}}$ утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\overrightarrow{n}$ до ∂D в точці $P(t,x) \in \Gamma^{(2)}$ кут менший за $\frac{\pi}{2}$, $b_0(t,x)\Big|_{\Gamma^{(2)}} > 0$, $\partial \Omega \subset C^{2+\alpha}$;

б) $f \in H^\alpha(\beta; \gamma; \delta; \mu_0; Q)$, $\varphi_k \in H^{2+\alpha}(\widetilde{\beta}; \widetilde{\gamma}; \delta; 0; Q \cap (t = t_k))$, $\widetilde{\gamma} = (0, \gamma^{(1)})$, $\widetilde{\beta} = (0, \beta^{(2)})$, $g \in H^{1+\alpha}(\beta; \gamma; \delta; \delta; Q^{(k)})$, $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(t,x) \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial x_k}|_{\Gamma^{(2)}} = 0$, $[g(t_\lambda + 0, x) - g(t_\lambda - 0, x)(1 + \psi_\lambda(x)) - B\varphi_\lambda(x)]|_{\Gamma^{(2)}} = 0$, $\psi_\lambda \in C^{2+\alpha}(Q \cap (t = t_\lambda))$, $\varphi_\lambda(x)|_{\Gamma^{(1)}} = 0$, $\beta^{(\nu)} = \max\{\max\limits_i (1 + \gamma_i^{(\nu)}), \max\limits_i (\mu_i^{(\nu)} - \gamma_i^{(\nu)}), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}, \delta^{(\nu)}\}$.

Спочатку встановимо коректну розв'язність крайових задач з гладкими коефіцієнтами, потім з множини одержаних розв'язків виділимо збіжну послідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (3.23)–(3.27).

Розглянемо послідовність областей $Q_m^{(k)} = Q^{(k)} \cap \{(t,x) \in Q^{(k)} \mid e_1(1,t) \geq m_1^{-1}, e_2(1,x) \geq m_2^{-1}\}$, $m = (m_1, m_2)$, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$, які при $m_1 \longrightarrow \infty$, $m_2 \longrightarrow \infty$ збігаються до $Q^{(k)}$.

В області Q розглянемо задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} + a_0(t,x)\Big] u_m(t,x) = f_m(t,x), \tag{3.29}$$

які задовольняють умови за змінною t

$$u_m(t_0+0,x) = \varphi_m^{(0)}(x), \tag{3.30}$$

$$u_m(t_\lambda+0,x) - u_m(t_\lambda-0,x) = \psi_m^{(\lambda)}(x) u_m(t_\lambda-0,x) + \varphi_m^{(\lambda)}(x)$$

і крайову умову

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}(B_1 u_m - g_m)(t,x) \equiv \lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}\Big[\sum_{i=1}^{n} h_i(t,x)\partial_{x_i}u_m + h_0(t,x)u_m - g_m(t,x)\Big] \geq 0,$$

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D} u_m \geq 0, \quad \lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}[u_m(B_1 u_m - g_m)] = 0. \tag{3.31}$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0, функції f_m, $\varphi_m^{(0)}$, $\varphi_m^{(\lambda)}$, g_m в областях $Q_m^{(k)}$ співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0, f, φ_0, φ_λ, g, відповідно, а в областях $Q^{(k)} \backslash Q_m^{(k)}$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0 і функцій f, φ_0, φ_λ, g, із областей $Q_m^{(k)}$ в області $Q^{(k)} \backslash Q_m^{(k)}$ із збереженням гладкості і норми [84, с. 82].

Правильна така теорема.

Теорема 3.7 *Нехай $u_m(t,x)$ – класичний розв'язок задачі* (3.29)–(3.31) *в області Q і виконані умови а), б). Тоді для $u_m(t,x)$ правильна оцінка*

$$|u_m(t,x)| \leq \sum_{k=1}^{N}\Big\{\prod_{\lambda=k}^{N}(1 + ||\psi_m^{(\lambda)}; Q\cap(t=t_\lambda)||_0)(||\varphi_m^{(k-1)}; Q\cap(t=t_{k-1})||_0 +$$

$$+||f_m a_0^{-1}; Q^{(k-1)}||_0 + ||g_m h_0^{-1}; Q^{(k-1)}||_0)\Big\} + ||\varphi_m^{(N)}; Q\cap(t=t_N)||_0 +$$

$$+||f_m a_0^{-1}; Q^{(N)}||_0 + ||g_m h_0^{-1}; Q^{(N)}||_0. \tag{3.32}$$

В областях $Q^{(k)}$ розглянемо задачу

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x), \;\; u_m(t_k+0,x) = G_m^{(k)}(t_k,x),$$
$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}[u_m(B_1u_m - g_m)] = 0, \quad \lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}(B_1u_m - g_m)(t,x) \geq 0, \tag{3.33}$$
$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D} u_m(t,x) \geq 0,$$

де $t\in[t_k,t_{k+1})$, $G_m^{(0)}(t_0,x) = \varphi_m^{(0)}(x)$, $x\in D$, $G_m^{(\lambda)}(t_k,x) = (1+\psi_m^{(\lambda)}(x))u_m(t_\lambda - 0,x) + \varphi_m^{(\lambda)}$, $x\in Q\cap(t=t_\lambda)$, $\lambda\in\{1,\dots,N\}$.

В областях $Q^{(k)}$ розв'язок крайової задачі (3.33) існує і єдиний в просторі $C^{2+\alpha}(Q^{(k)})$, [65].

Правильні такі твердження.

Теорема 3.8 *Якщо виконані умови а), б), то для розв'язку задачі* (3.29) – (3.31) *правильна оцінка*

$$\|u_m;\beta;\gamma;\delta;0;Q\|_{2+\alpha} \leq c\Bigg\{\sum_{k=1}^{N}\Big\{\prod_{\lambda=k}^{N}(1+\|\psi_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_\lambda))})\times$$
$$\times(\|\varphi_{k-1};\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};\delta;0;Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha} + \|f;\beta;\gamma;\delta;\mu_0;Q^{(k-1)}\|_\alpha +$$
$$+\|g;\beta;\gamma;\delta;\delta;Q^{(k-1)}\|_{1+\alpha})\Big\} + \|\varphi_N;\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};\delta;0;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}+$$
$$+\|f;\beta;\gamma;\delta;\mu_0;Q^{(N)}\|_\alpha + \|g;\beta;\gamma;\delta;\delta;Q^{(N)}\|_{1+\alpha}\Bigg\}. \tag{3.34}$$

Стала c не залежить від m.

Теорема 3.9 *Нехай для задачі* (3.23)–(3.27) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (3.23)–(3.27) *із простору* $H^{2+\alpha}(\beta;\gamma;\delta;0;Q)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\beta;\gamma;\delta;0;Q\|_{2+\alpha} \leq c\Big\{\sum_{k=0}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}(1+\|\psi_\lambda\|_{C^{2+\alpha}(Q\cap(t=t_\lambda))})\times$$
$$\times(\|\varphi_{k-1};\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};\delta;0;Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha} + \|f;\beta;\gamma;\delta;\mu_0;Q^{(k-1)}\|_\alpha +$$
$$+\|g;\beta;\gamma;\delta;\delta;Q^{(k-1)}\|_{1+\alpha}) + \|\varphi_N;\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};0;0;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}+$$
$$+\|f;\beta;\gamma;\delta;\mu_0;Q^N\|_\alpha + \|g;\beta;\gamma;\delta;\delta;Q^N\|_{1+\alpha}\Big\}. \tag{3.35}$$

Висновки до розділу

Основні результати цього розділу такі:

- знайдено умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші та задачі Діріхле для параболічного рівняння другого порядку зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння та з імпульсною умовою за часовою змінною у гельдерових просторах;

- встановлено коректну розв'язність задачі зі скісною похідною для параболічного рівняння з довільним степеневим виродженням у коефіцієнтах рівняння та крайових умов за часовою і просторовими змінними та з імпульсною умовою за часовою змінною у гельдерових просторах зі степеневою вагою, степінь якої залежить від порядку особливостей коефіцієнтів;

- встановлено існування, єдиність та оцінки розв'язків односторонньої крайової задачі з імпульсною умовою за часовою змінною для параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку за часовою і просторовими змінними в коефіцієнтах рівняння і крайових умов.

Ці результати одержані І.Д. Пукальським разом з Б.О. Яшаном в [87, 70, 71, 66, 75, 88, 116, 120, 122].

Розділ 4

БАГАТОТОЧКОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

У цьому розділі вивчаються багатоточкові за часовою змінною задачі Коші, Діріхле та задача зі скісною похідною для параболічного рівняння другого порядку зі степеневим виродженням у коефіцієнтах рівняння і крайових умов. Коефіцієнти рівняння допускають степеневі особливості довільного порядку за будь - якими змінними на деякій множині точок. Необхідні та достатні умови існування розв'язку доведено за допомогою принципу максимуму та апріорних оцінок в гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги залежить від степеневих особливостей коефіцієнтів рівняння.

Крім цього, тут розглядається задача оптимального керування системою, що описується задачею зі скісною похідною та інтегральною умовою за часовою змінною для параболічного рівняння другого порядку. Коефіцієнти параболічного рівняння і крайової умови допускають степеневі особливості довільного порядку за будь-якими змінними на деякій множині точок. Розглянуто випадки внутрішнього, стартового і межового керування. Критерій якості задається сумою об'ємних та поверхневих інтегралів. За допомогою принципу максимуму і апріорних оцінок встановлено існування і єдиність розв'язку нелокальної параболічної крайової задачі з виродженням. Крім того досліджена задача оптимального керування системою, що описується загальною крайовою задачею для $2b$-параболічного рівняння.

4.1 Багатоточкова задача для рівнянь з виродженням

Розглянемо задачу знаходження функції $u(x,t)$ в області $\Pi = [t_0, t_{N+1}) \times R^n$, яка при $t \neq t_\lambda$, $(t,x) \notin Q_{(0)}$ задовольняє рівняння

$$\Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\Big]u(t,x) = f(t,x) \qquad (4.1)$$

і багатоточкові умови за змінною t

$$u(t_k+0,x) = \varphi_k(x), \quad k \in \{0,1,...,N\}. \qquad (4.2)$$

Задача (4.1), (4.2) вивчається в просторі $H^l(\beta;\gamma;q;\Pi)$, де $H^l(\beta;\gamma;q;\Pi)$ – множина функцій простору $L_1(\Pi)$, які мають неперервні частинні похідні в $\Pi^{(k)} \setminus Q_{(0)}$ і для яких є правильною норма, яка визначена в п.3.2.

Задачу будемо досліджувати при виконанні таких умов:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\forall (t,x) \in \Pi \backslash Q_{(0)}$ виконується нерівність

$$c_1|\xi|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} e_1(\gamma_i^{(1)},t)e_1(\gamma_j^{(1)},t)e_2(\gamma_i^{(2)},x)e_2(\gamma_j^{(2)},x)A_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \leq c_2|\xi|^2,$$

де c_1, c_2 – фіксовані додатні сталі та $e_1(\mu_i^{(1)},t)e_2(\mu_i^{(2)},x)A_i \in H^\alpha(\beta;\gamma;0;\Pi)$, $e_1(\mu_0^{(1)},t)e_2(\mu_0^{(2)},x)A_0 \in H^\alpha(\beta;\gamma;0;\Pi)$, $A_0 \geq -a$, $a > 0$, $e_1(\gamma_i^{(1)},t)e_1(\gamma_j^{(1)},t)e_2(\gamma_i^{(2)},x)e_2(\gamma_j^{(2)},x)A_{ij} \in H^\alpha(\beta;\gamma;0;\Pi)$, $\beta^{(\nu)} = \max\{\max_i(1+\gamma_i^{(\nu)}), \max_i(\mu_i^{(\nu)} - \gamma_i^{(\nu)}), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}\}$, $\nu \in \{1,2\}$.

б) $f \in H^\alpha(\beta;\gamma;\mu_0;\Pi)$, $\varphi_0 \in H^{2+\alpha}(\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};0;R^n)$, $\varphi_\lambda \in H^{2+\alpha}(\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};\mu_0;\Pi \cap (t = t_\lambda))$, $\widetilde{\gamma} = (0;\gamma^{(2)})$, $\widetilde{\beta} = (0;\beta^{(2)})$.

Для того, щоб дослідити задачу (4.1), (4.2) побудуємо послідовність розв'язків задач з гладкими коефіцієнтами, граничне значення якої буде розв'язком задачі (4.1), (4.2).

Нехай $\Pi_m^{(k)} = \Pi^{(k)} \cap \{(t,x) \in \Pi^{(k)} \,|\, e_1(1,t) \geq m_1^{-1}, e_2(1,x) \geq m_2^{-1}\}$, $m = (m_1,m_2)$, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$ – послідовність областей, яка при $m_1 \longrightarrow \infty$, $m_2 \longrightarrow \infty$ збігається до $\Pi^{(k)}$.

Розглянемо в області Π задачу знаходження функцій $u_m(t,x)$, які при $t \neq t_\lambda$ задовольняють рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) = \Big(\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} + a_0(t,x)\Big)u_m(t,x) = f_m(t,x) \qquad (4.3)$$

і умову за часовою змінною t

$$u_m(t_k+0,x) = \varphi_m^{(k)}(x), \quad x \in Q_k \cap (t = t_k). \qquad (4.4)$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, а також функції f_m, $\varphi_m^{(k)}$ в областях $\Pi_m^{(k)}$ співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, f, φ_k, відповідно, а в областях $\Pi^{(k)}\backslash\Pi_m^{(k)}$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, і функцій f, φ_k із області $\Pi_m^{(k)}$ в області $\Pi^{(k)}\backslash\Pi_m^{(k)}$ із збереженням гладкості і норми [84, с. 82].

Для задачі (4.3), (4.4) правильною є така теорема.

Теорема 4.1 *Нехай в області* Π *виконані умови а), б) і* $u_m(t,x)$ *– класичний розв'язок задачі* (4.3), (4.4). *Тоді для* $u_m(t,x)$ *правильною є така оцінка*

$$\|u_m;\Pi^{(k)}\|_0 \le \|\varphi_m^{(k)};\Pi^{(k)}\cap(t=t_k)\|_0 + \|f_m a_0^{-1};\Pi^{(k)}\|_0. \qquad (4.5)$$

Тепер знайдемо оцінки розв'язків $u_m(t,x)$. У просторі $C^l(\Pi)$ введемо норму $\|u_m;\beta;\gamma;q;\Pi\|_l$, еквівалентну при фіксованих m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка виражається так само, як і $\|u;\beta;\gamma;q;\Pi\|_l$, тільки замість функцій $e_1(q^{(1)},t)$, $e_2(q^{(2)},x)$ покладемо відповідно $d_1(q^{(1)},t)$, $d_2(q^{(2)},x)$, де $d_1(q^{(1)},t)$ та $d_2(q^{(2)},x)$ мають такий самий вигляд, як і в п.3.3.

Правильні наступні твердження.

Теорема 4.2 *Якщо виконані умови а), б), то для задачі* (4.3), (4.4) *справджується нерівність*

$$\|u_m;\beta;\gamma;0;\Pi^{(k)}\|_{2+\alpha} \le c(\|f;\beta;\gamma;\mu_0;\Pi^{(k)}\|_\alpha +$$

$$+\|\varphi_k;\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};0;\Pi^{(k)}\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}). \qquad (4.6)$$

Теорема 4.3 *Нехай для задачі* (4.1), (4.2) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (4.1), (4.2) *із простору* $H^{2+\alpha}(\beta;\gamma;0;\Pi)$ *і правильна така оцінка*

$$||u;\beta;\gamma;0;\Pi||_{2+\alpha} \le c \sup_{k\in(0,1,\dots,N)} (\|\varphi_k;\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};0;\Pi\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha} +$$

$$+\|f;\beta;\gamma;\mu_0;\Pi^{(k)}\|_\alpha). \qquad (4.7)$$

4.2 Багатоточкова задача Діріхле

В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(x,t)$, яка при $(t,x) \in Q \setminus (Q_{(0)} \bigcup\limits_{k=0}^{N} (Q^{(k)} \cap (t = t_k)))$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = \Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\Big]u(t,x) =$$
$$= f(t,x), \tag{4.8}$$

багатоточкову умову за часовою змінною

$$u(t_k + 0, x) = \varphi_k(x), \quad x \in D\backslash\overline{\Omega}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, N\}, \tag{4.9}$$

і крайову умову

$$u|_\Gamma = g(t,x), \qquad \Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D. \tag{4.10}$$

Задачу (4.8) - (4.10) будемо досліджувати в функціональному просторі $H^l(\beta;\gamma;q;Q)$.

Дослідження задачі (4.8) – (4.10) будемо проводити за таких обмежень:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \le \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t,x)e_1(\gamma_i^{(1)},t)e_1(\gamma_j^{(1)},t)e_2(\gamma_i^{(2)},x)e_2(\gamma_j^{(2)},x)\xi_i\xi_j \le \pi_2|\xi|^2,$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі, $e_1(\gamma_i^{(1)},t)e_1(\gamma_j^{(1)},t)e_2(\gamma_i^{(2)},x)e_2(\gamma_j^{(2)},x)A_{ij}(P) \in H^\alpha(\beta;\gamma;0;Q)$, $e_1(\mu_i^{(1)},t)e_2(\mu_i^{(2)},x)A_i \in H^\alpha(\beta;\gamma;0;Q)$, $e_1(\mu_0^{(1)},t)e_2(\mu_0^{(2)},x)A_0 \in H^\alpha(\beta;\gamma;0;Q)$, $A_0 \ge -b$, $b \ge 0$, $\beta^{(\nu)} = \max\{\max\limits_i(1+\gamma_i^{(\nu)}), \max\limits_i(\mu_i^{(\nu)} - \gamma_i^{(\nu)}), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}\}$, $\nu \in \{1,2\}$.

б) $f \in H^\alpha(\beta;\gamma;\mu_0;Q)$, $\varphi_k(x) \in H^{2+\alpha}(\beta;\gamma;;0;Q \cap (t = t_k))$, $k \in \{0,1,\ldots,N\}$, $\varphi_k(x)|_{\Gamma^{(k)}} = g(t_k,x)|_{\Gamma_k}$, $g(t,x) \in H^{2+\alpha}(\beta;\gamma;0;\Gamma_k)$, $\Gamma^{(k)} = [t_k, t_{k+1}] \times D$, $\partial D \in C^{2+\alpha}$.

Встановимо оцінку розв'язку задачі (4.8) – (4.10). Нехай $Q_m^{(k)} = Q^{(k)} \cap \{(t,x) \in Q^{(k)} \mid e_1(1,t) \ge m_1^{-1}, e_2(1,x) \ge m_2^{-1}, t \in [t_k, t_{k+1})\}$, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$ – послідовність областей, яка при $m_1 \longrightarrow \infty$, $m_2 \longrightarrow \infty$ збігається до $Q^{(k)}\backslash Q^{(0)}$.

В області $Q^{(k)}$ будемо розглядати задачу знаходження функції $u_m(t,x)$, яка задовольняє рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \Big(\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} + a_0(t,x)\Big)u_m =$$

$$= f_m(t,x),\ \ t \in (t_k, t_{k+1}),\ x \in D, \tag{4.11}$$

умову за часовою змінною

$$u_m(t_k+0,x) = \varphi_m^{(k)}(x),\ x \in Q^{(k)} \cap (t=t_k), \tag{4.12}$$

і крайову умову

$$u_m|_{\Gamma^{(k)}} = g_m(t,x). \tag{4.13}$$

Коефіцієнти диференціального виразу L_1 означені у п. 3.2.

У задачі (4.11) – (4.13) виконаємо заміну

$$u_m(t,x) = \widetilde{g}_m(t,x) + v_m(t,x)e^{\mu t}, \tag{4.14}$$

де $\widetilde{g}_m(t,x)$ є неперервним продовженням функції $g_m(t,x)$ із $\Gamma^{(k)}$ в область $Q^{(k)}$, μ задовольняє умову $\mu > b$. Тоді $v_m(t,x)$ в області $Q^{(k)}$ задовольняє рівняння

$$(L_1 v_m)(t,x) \equiv \Big(\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} + (a_0(t,x)+\mu)\Big)v_m =$$

$$= e^{-\mu t}(f_m(t,x) - (L_1\widetilde{g}_m)(t,x)) \equiv F_m(t,x), \tag{4.15}$$

умови за часовою змінною і крайову умову:

$$v_m(t_k+0,x) = (\varphi_m^{(k)}(x) - \widetilde{g}_m(t_k,x))e^{-\mu t_k} \equiv \Phi_m^{(k)}(t_k,x),$$

$$v_m|_{\Gamma_k} = 0. \tag{4.16}$$

Теорема 4.4 *Нехай $v_m(t,x)$ – класичний розв'язок задачі* (4.15)–(4.16) *в області $\overline{Q}$ і виконуються умови а), б). Тоді для $v_m(t,x)$ справджується оцінка*

$$\|v_m; Q^{(k)}\|_0 \le \|\varphi_m^{(k)}; Q^{(k)} \cap (t=t_k)\|_0 + \|F_m(a_0+\mu)^{-1}; Q^{(k)}\|. \tag{4.17}$$

Доведення нерівності (4.17) проводиться за схемою доведення теореми 1.1 із п 1.2, тобто аналізуються усі можливі значення додатного максимуму і від'ємного мінімуму розв'язку $v_m(t,x)$ в області $Q^{(k)}$.

Основний результат цього пункту сформулюємо у вигляді наступних тверджень.

Теорема 4.5 *Якщо виконані умови а), б), то для задачі* (4.15), (4.16) *справджується нерівність*

$$\|v_m; \beta; \gamma; 0; Q^{(k)}\|_{2+\alpha} \le c(\|f; \beta; \gamma; \mu_0; Q^{(k)}\|_\alpha +$$

$$+\|\varphi_k; \widetilde{\beta}; \widetilde{\gamma}; 0; Q \cap (t=t_k)\|_{2+\alpha} + \|g; \beta; \gamma; 0; \Gamma^{(k)}\|_{1+\alpha}). \tag{4.18}$$

Теорема 4.6 *Нехай для задачі (4.8)–(4.10) виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (4.8)–(4.10) із простору* $H^{2+\alpha}(\beta;\gamma;0;Q)$ *і є правильною така оцінка:*

$$||u;\beta;\gamma;0;Q||_{2+\alpha} \le c \sup_{k\in\{0,1,\dots,N\}} \Big(\|\varphi_k;\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};0;Q\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|f;\beta;\gamma;\mu_0;Q^{(k)}\|_\alpha + \|g;\beta;\gamma;0;\Gamma^{(k)}\|_{1+\alpha}\Big). \qquad (4.19)$$

Теорема 4.7 *Нехай виконуються умови а), б),* $f\in H^\alpha(\beta;\gamma;0;Q)$*,* $A_0>0$*. Тоді єдиний розв'язок задачі (4.8) – (4.10) у просторі* $H^{2+\alpha}(\beta;\gamma;0;Q)$ *визначається в областях* $Q^{(k)}$*,* $k\in\{0,1,\dots,N\}$*, інтегралами Стілтьєса з борелівською мірою:*

$$u(t,x)=u_1^{(k)}+u_2^{(k)}+u_3^{(k)}=\int\limits_{Q^{(k)}} G_1^{(k)}(t,x;d\tau,d\xi)f(\tau,\xi)+$$

$$+\int\limits_{Q\cap(t=t_k)} G_2^{(k)}(t,x;d\xi)\varphi(\xi)+\int\limits_{\Gamma^{(k)}} G_3^{(k)}(t,x;d\tau,d_\xi S)g(\tau,\xi), \qquad (4.20)$$

і компоненти $G_1^{(k)}$*,* $G_2^{(k)}$*,* $G_3^{(k)}$ *задовольняють нерівності*

$$0\le \int\limits_{Q^{(k)}} G_1^{(k)}(t,x;d\tau,d\xi)\le \|A_0^{-1};Q^{(k)}\|_0,$$

$$0\le \int\limits_{Q\cap(t=t_k)} G_2^{(k)}(t,x;d\xi)\le 1,\quad 0\le \int\limits_{\Gamma^{(k)}} G_3^{(k)}(t,x;d\tau,d_\xi S)\le 1, \qquad (4.21)$$

де $(t,x)\in Q^{(k)}$.

4.3 Багатоточкова задача зі скісною похідною

В області $Q=[t_0,t_{N+1})\times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$ яка при $t\ne t_k$, $(t,x)\notin Q_{(0)}$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x)\equiv\Big[\partial_t-\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^n A_i(t,x)\partial_{x_i}+A_0(t,x)\Big]u(t,x)=f(t,x), \qquad (4.22)$$

багатоточкову умову за змінною t

$$u(t_k+0,x)=\varphi_k(x),\ \ x\in D\backslash\overline{\Omega},\ \ k\in\{0,1,\dots,N\} \tag{4.23}$$

і крайову умову

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}(Bu-g)(t,x)\equiv$$

$$\equiv\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}\Big[\sum_{i=1}^{n}b_i(t,x)\partial_{x_i}u+b_0(t,x)u-g(t,x)\Big]=0. \tag{4.24}$$

Степеневі особливості коефіцієнтів диференціальних виразів L і B у точці $P(t,x)\in Q\backslash Q_{(0)}$ характеризуватимуть функції $e_1(\gamma_i^{(1)},t)$, $e_2(\gamma_i^{(2)},x)$.

Задачу (4.22) – (4.24) будемо досліджувати за таких умов:

а) для довільного вектора $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$, $\forall(t,x)\in Q\backslash Q_{(0)}$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2\le\sum_{i=1}^{n}A_{ij}(t,x)e_1(\gamma_i^{(1)},t)e_1(\gamma_j^{(1)},t)e_2(\gamma_i^{(2)},x)e_2(\gamma_j^{(2)},x)\xi_i\xi_j\le\pi_2|\xi|^2, \tag{4.25}$$

π_1,π_2 – фіксовані додатні сталі, $|\xi|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2$, $e_1(\mu_i^{(1)},t)e_2(\mu_i^{(2)},x)A_i\in H^{\alpha}(\beta;\gamma;\delta;0;Q)$, $i\in\{0,\dots,n\}$, $A_0\ge -a$, $a>0$, $e_1(\delta^{(1)},t)e_2(\delta^{(2)},x)b_0\in H^{1+\alpha}(\beta;\gamma;\delta;0;Q)$, $e_1(\gamma_i^{(1)},t)e_1(\gamma_j^{(1)},t)e_2(\gamma_i^{(2)},x)e_2(\gamma_j^{(2)},x)A_{ij}\in H^{\alpha}(\beta;\gamma;\delta;0;Q)$, $e_1(\gamma_i^{(1)},t)e_2(\gamma_i^{(2)},x)b_i\in H^{1+\alpha}(\beta;\gamma;\delta;0;Q)$, вектори $\overrightarrow{b}^{(e)}=\{b_1^{(e)},\dots,b_n^{(e)}\}$, де $b_i^{(e)}=e_1(\gamma_i^{(1)},t)e_2(\gamma_i^{(2)},x)b_i)$ і $\overrightarrow{s}=\{s_1,\dots,s_n\}$, $s_i=b_i(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2)^{-\frac{1}{2}}$ утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\overrightarrow{n}$ до ∂D в точці $P(t,x)\in\Gamma$ кут менший за $\frac{\pi}{2}$, $\Gamma=[t_0,t_{N+1})\times\partial D$, $b_0(t,x)\Big|_{\Gamma}>0$;

б) $f\in H^{\alpha}(\beta;\gamma;\delta;\mu_0;Q)$, $\varphi_k\in H^{2+\alpha}(\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};\delta;0;Q\cap(t=t_k))$, $\widetilde{\gamma}=(0,\gamma^{(2)})$, $\widetilde{\beta}=(0,\beta^{(2)})$, $g\in H^{1+\alpha}(\beta;\gamma;\delta;\delta;Q^{(k)})$, $k\in\{0,1,\dots,N\}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow z\in\partial D}(B\varphi_k-g)(t_k,x)=0$, $\beta^{(\nu)}=\max\{\max\limits_i(1+\gamma_i^{(\nu)}),\max\limits_i(\mu_i^{(\nu)}-\gamma_i^{(\nu)}),\frac{\mu_0^{(\nu)}}{2},\delta^{(\nu)}\}$, $\nu\in\{1,2\}$.

Нехай $Q_m^{(k)}=Q^{(k)}\cap\{(t,x)\in Q^{(k)}\mid e_1(1,t)\ge m_1^{-1},e_2(1,x)\ge m_2^{-1}\}$, $m=(m_1,m_2)$, $m_i>1$, які при $m_i\longrightarrow\infty$, збігаються до $Q^{(k)}$.

Розглянемо в області $Q=[t_0,t_{N+1})\times D$ задачу про знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1u_m)(t,x)\equiv\Big[\partial_t-\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} + a_0(t,x)\Big] u_m(t,x) = f_m(t,x), \tag{4.26}$$

які задовольняють багатоточкові умови за змінною t

$$u_m(t_k+0,x) = \varphi_m^{(k)}(x), \quad k \in \{0,1,\dots,N\}, \tag{4.27}$$

а на бічній поверхні – крайову умову

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} (B_1 u_m - g_m)(t,x) \equiv$$

$$\equiv \lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} \Big[\sum_{i=1}^{n} h_i(t,x)\partial_{x_i} u_m + h_0(t,x) u_m - g_m(t,x)\Big] = 0. \tag{4.28}$$

Коефіцієнти диференціальних виразів L_1 і B_1 означені у п.3.3.

Теорема 4.8 *Нехай $u_m(t,x)$ – класичний розв'язок задачі* (4.26)–(4.28) *в області Q і виконані умови а), б). Тоді для $u_m(t,x)$ правильна оцінка*

$$|u_m(t,x)| \le \sup_k (\|\varphi_m^{(k)}; Q \cap (t=t_k)\|_0 + \|f_m a_0^{-1}; Q^{(k)}\|_0 + \|g_m h_0^{-1}; Q^{(k)}\|_0). \tag{4.29}$$

Доведення цієї оцінки проводиться за схемою доведення Теореми 3.1 п.3.2. Правильні наступні твердження.

Теорема 4.9 *Нехай виконуються умови а), б). Тоді для розв'язку задачі* (4.26) – (4.28) *є правильною оцінка*

$$\|u_m; \beta; \gamma; \delta; 0; Q\|_{2+\alpha} \le c \sup_k (\|\varphi_m^{(k)}; \widetilde{\beta}; \widetilde{\gamma}; \delta; 0; Q \cap (t=t_k)||_{2+\alpha} +$$

$$+\|f_m; \beta; \gamma; \delta; \mu_0; Q^{(k)}\|_\alpha + \|g_m; \beta; \gamma; \delta; 0; Q^{(k)}\|_{1+\alpha} + \|u_m; Q^{(k)}\|_0). \tag{4.30}$$

Теорема 4.10 *Нехай для задачі* (4.22)–(4.24) *виконуються умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (4.22)–(4.24) *із простору $H^{2+\alpha}(\beta;\gamma;\delta;0;Q)$ і є правильною така нерівність:*

$$\|u; \beta; \gamma; \delta; 0; Q||_{2+\alpha} \le c \sup_k \Big(\|f; \beta; \gamma; \delta; \mu_0; Q^{(k)}\|_\alpha +$$

$$+\|\varphi_k; \widetilde{\beta}; \widetilde{\gamma}; \delta; 0; Q \cap (t=t_k)\|_{2+\alpha} + \|g; \beta; \gamma; \delta; \delta; Q^{(k)}\|_{1+\alpha}\Big). \tag{4.31}$$

Якщо $f \in H^\alpha(\beta;\gamma;\delta;0;Q^{(k)})$, $g \in H^{1+\alpha}(\beta;\gamma;\delta;0;Q^{(k)})$. і для задачі (4.22)–(4.24) *виконуються умови а), б), то єдиний розв'язок задачі* (4.22)–(4.24) *в області $Q^{(k)}$ визначається інтегралами Стілтьєса з борелівською мірою:*

$$u(t,x) = \int_{Q^{(k)}} G_1^{(k)}(t,x;d\tau,d\xi) f(\tau,\xi) +$$

$$+\int\limits_{D} G_2^{(k)}(t,x;d\xi)\varphi_k(\xi)+\int\limits_{\Gamma^{(k)}} G_3^{(k)}(t,x;d\tau,d_\xi S)g(\tau,\xi), \tag{4.32}$$

компоненти якої $G_1^{(k)}$, $G_2^{(k)}$, $G_3^{(k)}$ *задовольняють нерівності*

$$\Big|\int\limits_{Q^{(k)}} G_1^{(k)}(t,x;d\tau,d\xi)\Big| \le \|A_0^{-1};Q^{(k)}\|_0,$$

$$\Big|\int\limits_{D} G_2^{(k)}(t,x;d\xi)\Big| \le 1, \quad \Big|\int\limits_{\Gamma^{(k)}} G_3^{(k)}(t,x;d\tau,d_\xi S)\Big| \le \|b_0^{-1};Q^{(k)}\|. \tag{4.33}$$

4.4 Оптимальне керування розв'язками нелокальної крайової задачі з інтегральною умовою

Нехай D обмежена область в R^n з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область, $\overline{\Omega} \subset D$, $\dim \Omega \le n-1$. Позначимо через $Q_{(0)} = \{(t,x)|t \in [0,T]), x \in \Omega\} \cup \{(t,x), t=\eta, x \in D\}$, $\eta \in (0,T)$, $\Gamma = [0,T) \times \partial\Omega$.

Розглянемо в області $Q = [0,T) \times D$ задачу знаходження функцій (u,q), $q = (q_1,q_2,q_3)$, на яких функціонал

$$I(q) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D F_1(t,x;u(t,x;q),q_1(t,x))dx + \int\limits_D F_2(x;u(T,x;q),q_2(x))dx+$$

$$+\int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial D} F_3(t,x;u(t,x;q),q_3(t,x))d_xS \tag{4.34}$$

досягає мінімуму в класі функцій $q \in V = \{q|q_1 \in C^\alpha(Q),\ q_2 \in C^{2+\alpha}(D),\ q_3 \in C^{1+\alpha}(Q),\ \nu_{11}(t,x) \le q_1 \le \nu_{12}(t,x),\ \nu_{21}(t,x) \le q_2 \le \nu_{22}(t,x),\ \nu_{31}(t,x) \le q_3 \le \nu_{32}(t,x),\}$, із яких $u(t,x;q_1(t,x),q_2(x),q_3(t,x))$ задовольняє при $(t,x) \in Q^{(0)} = Q \backslash Q_{(0)}$ рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^n A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\Big]u =$$

$$= f(t,x;q_1(t,x)), \tag{4.35}$$

інтегральну умову за часовою змінною

$$(Bu)(x) \equiv u(0,x;q) + \int\limits_0^T R(\tau,x)u(\tau,x;q)d\tau = \varphi(x;q_2(x)) \tag{4.36}$$

і на бічній поверхні Γ крайову умову

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}(B_1u-\psi)(t,x)=\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}\Big[\sum_{k=1}^{n}b_k(t,x)\partial_{x_k}u(t,x;q)+$$

$$+b_0(t,x)u(t,x;q)-\psi(t,x,q_3(t,x))\Big]=0. \qquad (4.37)$$

Степеневі особливості коефіцієнтів диференціальних виразів L і B_1 у точці $P(t,x)\in Q\backslash Q_{(0)}$ характеризуватимуть функції $e_1(\gamma_i^{(1)},t)$, $e_2(\gamma_i^{(2)},x)$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (4.34)–(4.37). Позначимо через $C^l(\beta;\gamma;\delta;q;Q)$ множину функцій u, які мають неперервні похідні в $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_t^s\partial_x^r$, $2s+|r|\le[l]$, для яких скінченна норма

$$||u;\beta;\gamma;\delta;0;Q||_0=\{\sup_{\overline{Q}}|u|\}\equiv||u;Q||_0,$$

$$||u;\beta;\gamma;\delta;q;Q||_l=\sum_{2s+|r|\le[l]}||u;\beta;\gamma;\delta;q;Q||_{2s+|r|}+\langle u;\beta;\gamma;\delta;q;Q\rangle_l,$$

де, наприклад,

$$||u;\beta;\gamma;\delta;q;Q||_{2s+|r|}\equiv\sup_{P\in\overline{Q}}[e_1(q^{(1)}+2s\gamma^{(1)},t)e_2(q^{(2)}+2s\gamma^{(2)},x)|\partial_t^s\partial_x^ru(P)|\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}e_1(r_i(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t)e_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x)],$$

$$\langle u;\beta;\gamma;\delta;q;Q^{(k)}\rangle_l\equiv\sum_{2s+|r|=[l]}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}[\sup_{(P_2R_\nu)\subset Q}[e_1(q^{(1)}+2s\gamma^{(1)},t^{(2)})e_2(q^{(2)}+2s\gamma^{(2)},\widetilde{x})\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}e_1(r_i(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t^{(2)})e_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\widetilde{x})|\partial_t^s\partial_x^ru(P_2)-\partial_t^s\partial_x^ru(R_\nu)|\times$$

$$\times|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}|^{-\{l\}}e_1(\{l\}(\gamma^{(1)}-\beta_\nu^{(1)}),t^{(2)})e_2(\{l\}(\gamma^{(2)}-\beta_\nu^{(2)}),\widetilde{x})]+$$

$$+\sup_{(P_1P_2)\subset\overline{Q}}[e_1(q^{(1)}+l\gamma^{(1)},\widetilde{t})e_2(q^{(2)}+(2s+\{l\})\gamma^{(2)},x^{(1)})\prod_{i=1}^{n}e_1(-r_i\beta_i^{(1)},\widetilde{t})\times$$

$$\times e_2(r_i(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),x^{(1)})|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\{\frac{l}{2}\}}|\partial_t^s\partial_x^ru(P_1)-\partial_t^s\partial_x^ru(P_2)|\ ]\Big\},$$

$|r|=r_1+\cdots+r_n$, $e_1(q,\widetilde{t})=\min(e_1(q,t^{(1)}),e_2(q,t^{(2)}))$,
$e_2(q,\widetilde{x})=\min(e_2(q,x^{(1)}),e_2(q,x^{(2)}))$.

Будемо вважати, що для задачі (4.34)–(4.37) виконуються наступні умови:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\forall (t,x) \in Q \backslash Q_{(0)}$ виконується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(t,x) e_1(\gamma_i^{(1)}, t) e_1(\gamma_j^{(1)}, t) e_2(\gamma_i^{(2)}, x) e_2(\gamma_j^{(2)}, x) \xi_i \xi_j \leq \pi_2 |\xi|^2, \quad (4.38)$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі та $e_1(\mu_i^{(1)}, t) e_2(\mu_i^{(2)}, x) A_i \in C^\alpha(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, $e_1(\mu_0^{(1)}, t) e_2(\mu_0^{(2)}, x) A_0 \in C^\alpha(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, $A_0 \geq 0$, $e_1(\delta^{(1)}, t) e_2(\delta^{(2)}, x) b_0 \in C^{1+\alpha}(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, $e_1(\gamma_i^{(1)}, t) e_1(\gamma_j^{(1)}, t) e_2(\gamma_i^{(2)}, x) e_2(\gamma_j^{(2)}, x) A_{ij} \in C^\alpha(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, $e_1(\gamma_i^{(1)}, t) e_2(\gamma_i^{(2)}, x) b_i \in C^{1+\alpha}(\beta; \gamma; \delta; 0; Q)$, вектори $\overrightarrow{b}^{(e)} = \{b_1^{(e)}, \dots, b_n^{(e)}\}$, $b_i^{(e)} = e_1(\gamma_i^{(1)}, t) e_2(\gamma_i^{(2)}, x) b_i$ і $\overrightarrow{s} = \{s_1, \dots, s_n\}$, $s_i = b_i (\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2)^{-\frac{1}{2}}$ утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\overrightarrow{n}$ до ∂D в точці $P(t,x) \in \Gamma$ кут менший за $\frac{\pi}{2}$, $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$, $b_0(t,x)\Big|_{\Gamma^{(2)}} > 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow z \in \partial D} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(t,x) \frac{\partial R(t,x)}{\partial x_k} = 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow z \in \partial D} [\psi(0, x; q_3(0,x)) + \int\limits_0^T R(t,x) \psi(t,x; q_3(t,x)) dt - B_1 \varphi(x, q_2(x))] = 0$; $\sup\limits_{x \in D} \int\limits_0^T |R(t,x)| dt \leq \lambda_0 < 1$, $R(t,x) \in C^{2+\alpha}(D)$, $\partial D \in C^{2+\alpha}$, $\mu_i^{(\nu)} \geq 0$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\delta^{(\nu)} \geq 0$, $\gamma_i^{(\nu)} \in (-\infty; \infty)$, $\beta^{(\nu)} = \max\{\max\limits_i (1 + \gamma_i^{(\nu)}), \max\limits_i (\beta^{(\nu)} - \gamma_i^{(\nu)}), \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}, \delta^{(\nu)}\}$, $\nu \in \{1, 2\}$;

б) $\nu_{11} \in C^\alpha(Q)$, $\nu_{12} \in C^\alpha(Q)$, $f(t,x; q_1(t,x)) \equiv F(t,x) \in C^\alpha(\beta; \gamma; \delta; \mu_0; Q)$, $\nu_{21} \in C^{2+\alpha}(D)$, $\nu_{22} \in C^{2+\alpha}(D)$, $\varphi(x; q_2(x)) \equiv \Phi(x) \in C^{2+\alpha}(\widetilde{\beta}; \widetilde{\gamma}; \delta; 0; D)$, $\nu_{31} \in C^{1+\alpha}(Q)$, $\nu_{32} \in C^{1+\alpha}(Q)$, $\psi(t,x; q_3(t,x)) \equiv G(t,x) \in C^{1+\alpha}(\beta; \gamma; \delta; \delta; Q)$;

в) функції $F_1(t,x; u; q_1)$, $f(t,x; q_1(t,x))$, $F_2(x; u; q_2)$, $\varphi(x; q_2(x))$, $F_3(t,x; u; q_3)$, $\psi(t,x; q_3(t,x))$ мають похідні другого порядку за змінними $(u; q_1)$, (u, q_2), (u, q_3), які належать як функції змінних (t,x), x відповідно просторам $C^\alpha(Q)$, $C^{2+\alpha}(D)$, $C^{1+\alpha}(\Gamma)$.

Розглянемо спочатку послідовність крайових задач з гладкими коефіцієнтами та встановимо їх коректну розв'язність. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну послідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (4.35)–(4.37).

Нехай $Q_m = Q \cap \{(t,x) \in Q \mid e_1(1,t) \geq m_1^{-1}, e_2(1,x) \geq m_2^{-1}\}$, $m = (m_1, m_2)$, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$ – послідовності областей, які при $m_1 \longrightarrow \infty$, $m_2 \longrightarrow \infty$ збігаються до Q.

Розглянемо в області Q задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} + a_0(t,x)\Big] u_m(t,x) =$$
$$= f_m(t,x;q_1), \qquad (4.39)$$

які задовольняють умови за змінною t

$$(Bu_m)(x) = \varphi_m(x;q_2) \qquad (4.40)$$

і крайову умову

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D} (B_2 u_m - \psi_m)(t,x) \equiv$$
$$\equiv \lim_{x\longrightarrow z\in\partial D} \Big[\sum_{i=1}^{n} h_i(t,x)\partial_{x_i} u_m + h_0(t,x)u_m - \psi_m(t,x;q_3)\Big] = 0. \qquad (4.41)$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0, функції f_m, φ_m, ψ_m в області Q_m співпадають з A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0, f, φ, ψ, відповідно, а в області $Q\backslash Q_m$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0, і функцій f, φ, ψ із області Q_m в область $Q\backslash Q_m$ із збереженням гладкості і норми [84, с. 82].

Для розв'язку задачі (4.39)–(4.41) правильна теорема.

Теорема 4.11 *Нехай $u_m(t,x)$ – класичний розв'язок задачі* (4.39)–(4.41) *в області Q і виконані умови а), б). Тоді для $u_m(t,x)$ правильна оцінка*

$$\|u_m;Q\|_0 \le c\|\varphi_m;D\|_0 + \|f_m;Q\|_0 + \|\psi_m;Q\|_0). \qquad (4.42)$$

Доведення цієї теореми грунтується на аналізі всіх можливих розміщень додатного максимуму і від'ємного мінімуму функції $u_m(t,x)$.

Позначимо через $(G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi), G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi))$, функцію Гріна крайової задачі

$$\begin{gathered}(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x;q_1),\\ u_m(0,x) = \varphi_m(x;q_2),\\ \lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}(B_2 u_m - \psi_m)(t,x) = 0.\end{gathered} \qquad (4.43)$$

Правильна така теорема.

Теорема 4.12 *Нехай виконані умови а), б). Тоді існує функція Гріна задачі* (4.39) – (4.41) $(E_m^{(1)}, E_m^{(2)})$ *і справедлива формула*

$$u_m(t,x) = \int_0^T d\tau \int_D E_m^{(1)}(T,t,x,\tau,\xi) f_m(\tau,\xi;q_1)d\xi + \int_D E_m^{(1)}(T,t,x,0,\xi)\varphi_m(\xi;q_2)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial D} E_m^{(2)}(T,t,x,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi;q_3)d_\xi S+ \tag{4.44}$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi)f_m(\tau,\xi)d\xi + \int\limits_D G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)\varphi_m(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial D} G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi)\psi_m(\tau,\xi)d_\xi S.$$

В області Q розглянемо задачу

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x;q_1),\ \ u_m(0,x) = G_m(x),$$

$$\lim_{x\longrightarrow z\in\partial D}(B_2 u_m - \psi_m)(t,x) = 0, \tag{4.45}$$

де $G_m(x) = \varphi_m(x;q_2) - \int\limits_0^T R(\tau,x)u_m(\tau,x)d\tau$.

В області Q розв'язок крайової задачі (4.45) існує і єдиний в просторі $C^{2+\alpha}(Q)$, [**?**, с. 125]. Знайдемо оцінки похідних розв'язків $u_m(t,x)$.

Теорема 4.13 *Якщо виконані умови а), б), то для розв'язку задачі* (4.39) – (4.41) *правильна оцінка*

$$||u_m;\beta;\gamma;\delta;0;Q||_{2+\alpha} \le c(\|\varphi;\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};\delta;0;D\|_{2+\alpha} + \|f;\beta;\gamma;\delta;\mu_0;Q\|_\alpha +$$

$$+\|\psi;\beta;\gamma;\delta;\delta;Q\|_{1+\alpha}). \tag{4.46}$$

Стала с не залежить від m.

Теорема 4.14 *Нехай для задачі* (4.35)–(4.37) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (4.35)–(4.37) *із простору* $^{2+\alpha}(\beta;\gamma;\delta;0;Q)$ *і справджується нерівність*

$$||u;\beta;\gamma;\delta;0;Q||_{2+\alpha} \le c(||f;\beta;\gamma;\delta;\mu_0;Q||_\alpha + ||\varphi;\widetilde{\beta};\widetilde{\gamma};\delta;0;D||_{2+\alpha}+$$

$$+||\psi;\beta;\gamma;\delta;\delta;Q||_{1+\alpha}). \tag{4.47}$$

Задача оптимального керування. Для розв'язності задачі (4.34) – (4.37) побудуємо послідовність розв'язків задач, граничне значення якої буде розв'язком задачі (4.34) – (4.37).

Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій (u_m, q), на яких функціонал

$$I(q) = \int_0^T dt \int_D F_1(t,x;u_m,q_1)dx + \int_D F_2(x;u_m,q_2)dx +$$

$$+ \int_0^T dt \int_D F_3(t,x;u_m,q_3)d_xS \tag{4.48}$$

досягає мінімального значення в класі функцій $q \in V$, де u_m задовольняє рівняння (4.39), інтегральну умову за часовою змінною (4.40) і на бічній поверхні Γ крайову умову (4.41).
Позначимо

$$\mu_1(\tau,\xi) = \int_0^T dt \int_D E_m^{(1)}(T,t,x,\tau,\xi) \frac{\partial F_1(t,x;u_m;q_1)}{\partial u_m} dx +$$

$$+ \int_\tau^T dt \int_D G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi) \frac{\partial F_1(t,x;u_m;q_1)}{\partial u_m} dx +$$

$$+ \int_D (E_m^{(1)}(T,T,x,0,\xi) + G_m^{(1)}(T,x,0,\xi)) \frac{\partial F_2(x;u_m;q_2)}{\partial u_m} dx +$$

$$+ \int_0^T dt \int_{\partial D} E_m^{(1)}(T,t,x,\tau,\xi) \frac{\partial F_3(t,x;u_m;q_3)}{\partial u_m} d_xS +$$

$$+ \int_\tau^T dt \int_{\partial D} G_m^{(1)}(t,x,\tau,\xi) \frac{\partial F_3(t,x;u_m;q_3)}{\partial u_m} d_xS,$$

$$\mu_2(\xi) = \int_0^T dt \int_D (E_m^{(1)}(T,t,x,0,\xi) + G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)) \frac{\partial F_1(t,x;u_m;q_1)}{\partial u_m} dx +$$

$$+ \int_D (E_m^{(1)}(T,T,x,0,\xi) + G_m^{(1)}(T,x,0,\xi)) \frac{\partial F_2(x;u_m,q_2)}{\partial u_m} dx +$$

$$+ \int_0^T dt \int_{\partial D} (E_m^{(1)}(T,t,x,0,\xi) + G_m^{(1)}(t,x,0,\xi)) \frac{\partial F_3(t,x;u_m;q_3)}{\partial u_m} d_xS,$$

$$\mu_3(\tau,\xi) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D E_m^{(2)}(T,t,x,\tau,\xi)\frac{\partial F_3(t,x;u_m,q_3)}{\partial u_m}dx+$$

$$+\int\limits_\tau^T dt \int\limits_D G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi)\frac{\partial F_3(t,x;u_m,q_3)}{\partial u_m}dx + \int\limits_D (E_m^{(2)}(T,T,x,0,\xi)+$$

$$+G_m^{(2)}(T,x,0,\xi))\frac{\partial F_2(x;u_m,q_2)}{\partial u_m}dx+\int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial D} E_m^{(2)}(T,t,x,\tau,\xi)\frac{\partial F_3(t,x;u_m,q_3)}{\partial u_m}dx+$$

$$+\int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\partial D} G_m^{(2)}(t,x,\tau,\xi)\frac{\partial F_3(t,x;u_m;q_3)}{\partial u_m}d_xS,$$

$$H_1(u_m,\mu_1,q_1) \equiv F_1(t,x;u_m,q_1) + \mu_1(t,x)f_m(t,x,q_1),$$

$$H_2(u_m,\mu_2,q_2) \equiv F_2(x;u_m,q_2) + \mu_2(x)\varphi_m(x,q_2),$$

$$H_3(u_m,\mu_3,q_3) \equiv F_3(t,x;u_m,q_3) + \mu_3(x)\psi_m(t,x,q_3),$$

$q^{(0)} = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)})$ – оптимальне керування,
$u_m(t,x,q^{(0)})$ – оптимальний розв'язок задачі (4.43).

Правильна така теорема.

Теорема 4.15 *Якщо $\partial_{q_k} H_k(u_m,\mu_k,q_k) > 0$, то оптимальне керування $q_k^{(0)} = \nu_{k1}$, $k \in \{1,2,3\}$. Якщо $\partial_{q_\nu} H_k(u_m,\mu_k,q_k) < 0$, то оптимальне керування $q_k^{(0)} = \nu_{k2}$, $k \in \{1,2,3\}$.*

Нехай умови Теореми 4.15 не виконані. Тоді правильна така теорема.

Теорема 4.16 *Для того, щоб $q_k^{(0)}$ були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови:*
1) функції $H_k(u_m,\mu_k,q_k)$ за аргументом q_k мають в точці $q_k^{(0)}$ мінімальне значення;
2) для довільного вектора $(e_k^{(1)}, e_k^{(2)}) \neq 0$ виконуються нерівності

$$\partial^2_{u_m} F_k(t,x;u_m;q_k^{(0)})(e_k^{(1)})^2 + 2\partial_{q_k}\partial_{u_m} F_k(t,x;u_m;q_k^{(0)})e_k^{(1)}e_k^{(2)}+$$

$$+\partial^2_{q_k} F_k(t,x;u_m;q_k^{(0)})(e_k^{(2)})^2 > 0,\ k \in \{1,3\}$$

$$\partial^2_{u_m} F_2(x;u_m;q_2^{(0)})(e_2^{(1)})^2 + 2\partial_{q_2}\partial_{u_m} F_2(x;u_m;q_2^{(0)})e_2^{(1)}e_2^{(2)}+$$

$$+\partial^2_{q_2} F_2(x;u_m;q_2^{(0)})(e_2^{(2)})^2 > 0.$$

Доведення Теореми 4.16. проводиться за допомогою методики праці [65]. Переходячи до границі в задачі (4.39) – (4.41), (4.48) при $m_1 \longrightarrow \infty$, $m_2 \longrightarrow \infty$ одержимо оптимальний розв'язок задачі (4.34) – (4.37).

4.5 Оптимальне керування в багатоточковій крайовій задачі для $2b$-параболічних рівнянь

Досліджується задача оптимального керування системою, що описується загальною багатоточковою крайовою задачею для $2b$-параболічних рівнянь. Розглянуто випадки внутрішнього, стартового і межового керування. Критерій якості задається сумою об'ємних та поверхневих інтегралів. За допомогою функції Гріна крайової задачі для $2b$-параболічного рівняння встановлено існування, єдиність та інтегральне зображення розв'язків загальної багатоточкової крайової задачі для $2b$-параболічних рівнянь. Знайдено оцінки розв'язків багатоточкової крайової задачі та його похідних в гельдерових просторах. Встановлено необхідні і достатні умови існування оптимального розв'язку системи, що описується загальною багатоточковою крайовою задачею для $2b$-параболічних рівнянь.

Нехай $t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}$ – довільні числа, $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1}$, D – обмежена область в R^n з межею ∂D, $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$. Розглянемо в області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ задачу знаходження функцій (u, q), $q = (q_1, q_2, q_3)$, на яких функціонал

$$I(q) = \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_D F_1(t, x; u, q_1)dx + \int\limits_D F_2(x, u(t_1, x; q), \ldots, u(t_N, x; q), q_2)dx +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_{\partial D} F_3(t, x; u, q_3)d_xS \tag{4.49}$$

досягає мінімуму в класі функцій $q \in V = \big\{q | q_1 \in C^{\alpha}(Q)$, $q_2 \in C^{2b+\alpha}(D)$, $q_3 \in C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)$, $\nu_{11}(t, x) \le q_1 \le \nu_{12}(t, x)$, $\nu_{21}(x) \le q_2 \le \nu_{22}(x)$, $\nu_{31}(t, x) \le q_3 \le \nu_{32}(t, x)\big\}$, із яких $u(t, x; q_1(t, x), q_2(x), q_3(t, x))$ задовольняє при $(t, x) \in Q$ рівняння

$$(Lu)(t, x) \equiv \left(D_t - \sum_{|k| \le 2b} A_k(t, x) D_x^k\right) u = f_0(t, x; q_1(t, x)), \tag{4.50}$$

нелокальну умову за часовою змінною

$$(Bu)(x) \equiv u(t_0, x; q) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x) u(t_j, x; q) = \varphi(x; q_2(x)) \qquad (4.51)$$

і на бічній поверхні Γ крайову умову

$$(B_i u)(t, x)|_\Gamma \equiv \left(\sum_{|k| \le r_i} b_k^{(i)}(t, x) D_x^k \right) u|_\Gamma = f_i(t, x; q_3(t, x)), \qquad (4.52)$$

$0 \le r_i \le 2b - 1$, $i \in \{1, 2, \ldots, b\}$, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, $D_x^k = D_{x_1}^{k_1} D_{x_2}^{k_2} \ldots D_{x_n}^{k_n}$.

Будемо вважати виконаними такі умови:

а) крайова задача (4.50)–(4.52) параболічна [28] і $A_k(t, x) \in C^{l+\alpha}(Q)$, $b_k^{(i)}(t, x) \in C^{2b - r_i + l + \alpha}(\Gamma)$, $d_i(x) \in C^{2b+\alpha}(D)$, $\partial D \in C^{2b+l+\alpha}$, $l = 4b - 2r + 1$, $r = \min\limits_i r_i$;

б) функції $\varphi(x; q_2(x)) \in C^{2b+\alpha}(D)$, $f_0(t, x; q_1(t, x)) \in C^{\alpha}(Q)$, $f_i(t, x; q_3(t, x)) \in C^{2b - r_i + \alpha}(\Gamma)$, $(B_i \varphi)(0, x)|_\Gamma = f_i(0, x; q_3(0, x))$;

в) $f_0(t, x; q_1(t, x)) = r_0(t) \psi_0(x, q_1(x))$, $f_i(t, x; q_3(t, x)) = r_i(t) \psi_i(x, q_3(x))$, $F_1(t, x; u(t, x; q), q_1)$, $F_2(x; \vec{v})$, $\vec{v} = \{v_1, \ldots, v_{N+1}\} = \{u(t_1, x; q), u(t_2, x; q), \ldots, u(t_N, x; q), q_2\}$, $F_3(t, x; u(t, x; q), q_3)$ мають похідні другого порядку за змінними $(u; q_1, q_2, q_3)$, які належать, як функції змінних (t, x), x відповідно просторам $C^{\alpha}(Q)$, $C^{2b+\alpha}(D)$, $C^{2b - r_i + \alpha}(\Gamma)$, $\nu_{1l} \in C^{\alpha}(Q)$, $\nu_{2l} \in C^{2b+\alpha}(D)$, $\nu_{3l} \in C^{2b - r_i + \alpha}(\Gamma)$, $l \in \{1, 2, 3\}$.

За умов накладених на гладкість коефіцієнтів рівняння (4.50) і крайових умов (4.52), існує функція Гріна $(G_0, G_1, \ldots, G_b)$ крайової задачі ([28], теорема 1)

$$(L\omega)(t, x) = f_0(t, x; q_1), \ \omega(t_0, x; q) = \varphi(x; q_2), \ (B_i \omega)(t, x)|_\Gamma = f_i(t, x; q_3), \qquad (4.53)$$

за допомогою якої розв'язок задачі (4.53) визначається формулою

$$\omega(t, x; q) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_D G_0(t, x, \tau, \xi) f_0(\tau, \xi; q_1) d\xi + \int_D G_0(t, x, t_0, \xi) \varphi(\xi, q_2) d\xi +$$

$$+ \sum_{i=1}^{b} \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\partial D} G_i(t, x, \tau, \xi) f_i(\tau, \xi; q_3) d_\xi S. \qquad (4.54)$$

Якщо $l \ge 0$ і виконані умови а), б), то згідно з теоремою 1 [28] існує єдиний розв'язок задачі (4.53) в просторі $C^{2b+\alpha}(Q)$ при довільних $q \in V$ і для нього правильна оцінка

$$\|\omega\|_{C^{2b+\alpha}(Q)} \leq c\left(\|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(D)} + \|f_0\|_{C^{\alpha}(Q)} + \sum_{i=1}^{b}\|f_i\|_{C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)}\right). \qquad (4.55)$$

Правильна така теорема.

Теорема 4.17 *Нехай виконані умови а), б),*

$$\sum_{j=1}^{N}|d_j(x)|\int_D |G_0(t_j,x,t_0,\xi)|d\xi \leq \lambda_0 < 1.$$

Тоді існує функція Гріна задачі (4.50)–(4.52) *з компонентами* $(G_0, G_1, \ldots, G_b; Z_0, Z_1, \ldots, Z_b)$, *справедлива формула*

$$u(t,x,q) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_D G_0(t,x,\tau,\xi) f_0(\tau,\xi;q_1)d\xi + \int_D G_0(t,x,t_0,\xi)\varphi(\xi;q_2)d\xi +$$

$$+\sum_{i=1}^{b}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\partial D} G_i(t,x,\tau,\xi) f_i(\tau,\xi;q_3)d_\xi S +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\left[\int_{t_0}^{t} d\tau \int_D Z_0(t_j,t,x,\tau,\xi) f_0(\tau,\xi;q_1)d\xi + \int_D Z_0(t_j,t,x,t_0,\xi)\varphi(\xi;q_2)d\xi +\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{b}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\partial D} Z_i(t_j,t,x,\tau,\xi) f_i(\tau,\xi;q_3)d_\xi S\right] \qquad (4.56)$$

і для єдиного розв'язку задачі (4.50)–(4.52) *правильна оцінка*

$$\|u\|_{C^{2b+\alpha}(Q)} \leq c\left(\|f_0\|_{C^{\alpha}(Q)} + \|\varphi\|_{C^{2b+\alpha}(D)} + \sum_{i=1}^{b}\|f_i\|_{C^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)}\right). \qquad (4.57)$$

Задача оптимального керування. В області Q розглянемо задачу (4.49)–(4.52). Будемо вважати, що виконані умови а), б), в).

Позначимо через

$$\lambda_1(\xi) = \int_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int_{t_0}^{t} r_0(\tau)d\tau \int_D \frac{\partial F_1(t,x;u)}{\partial u} G_0(t,x,\tau,\xi)dx + \int_{t_0}^{t_{N+1}} dt \sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t_j} r_0(\tau)d\tau \times$$

$$\times \int\limits_D \frac{\partial F_1(t,x;u)}{\partial u} Z_0(t_j,t,x,\tau,\xi)dx + \sum_{k=1}^N \left[\int\limits_{t_0}^{t_k} r_0(\tau)d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_2(x,\vec{v})}{\partial v_k} G_0(t_k,x,\tau,\xi)dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^N \int\limits_{t_0}^{t_j} r_0(\tau)d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_2(x,\vec{v})}{\partial v_k} Z_0(t_j,t_k,x,\tau,\xi)dx \right] + \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_{t_0}^{t} r_0(\tau)d\tau \int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u)}{\partial u} \times$$

$$\times G_0(t,x,\tau,\xi)dx + \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \sum_{j=1}^N \int\limits_{t_0}^{t_j} r_0(\tau)d\tau \int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u)}{\partial u} Z_0(t_j,t,x,\tau,\xi)dx,$$

$$\lambda_2(\xi) = \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_D \frac{\partial F_1(t,x;u)}{\partial u} \left[G_0(t,x,t_0,\xi) + \sum_{j=1}^N Z_0(t_j,t,x,t_0,\xi) \right] dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \int\limits_D \frac{\partial F_2(x,\vec{v})}{\partial v_k} \left[G_0(t_k,x,\tau,\xi) + \sum_{j=1}^N Z_0(t_j,t_k,x,t_0,\xi) \right] dx +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u)}{\partial u} \left[G_0(t,x,t_0,\xi) + \sum_{j=1}^N Z_0(t_j,t,x,t_0,\xi) \right] dx,$$

$$\mu_i(\xi) = \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_{t_0}^{t} r_i(\tau)d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_1(t,x;u)}{\partial u} G_i(t,x,\tau,\xi)dx + \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \sum_{j=1}^N \int\limits_{t_0}^{t_j} r_i(\tau)d\tau \times$$

$$\times \int\limits_D \frac{\partial F_1(t,x;u)}{\partial u} Z_i(t_j,t,x,\tau,\xi)dx + \sum_{k=1}^N \left[\int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} r_i(\tau)d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_2(x,\vec{v})}{\partial v_k} G_i(t_k,x,\tau,\xi)dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^N \int\limits_{t_0}^{t_k} r_i(\tau)d\tau \int\limits_D \frac{\partial F_2(x,\vec{v})}{\partial v_k} Z_i(t_j,t_k,x,\tau,\xi)dx \right] + \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \int\limits_{t_0}^{t} r_i(\tau)d\tau \int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u)}{\partial u} \times$$

$$\times G_i(t,x,\tau,\xi)d_xS + \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} dt \sum_{j=1}^N \int\limits_{t_0}^{t_j} r_i(\tau)d\tau \int\limits_{\partial D} \frac{\partial F_3(t,x;u)}{\partial u} Z_i(t_j,t,x,\tau,\xi)d_xS,$$

$i \in \{1, 2, \ldots, b\}$,

$$H_1(\xi,u,\lambda_1,q_1) = \lambda_1(\xi) f_0(\xi;q_1(\xi)) + \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} F_1(t,\xi;u,q_1)dt,$$

$$H_2(\xi, u, \lambda_2, q_2) = \lambda_2(\xi)\varphi(\xi; q_2(\xi)) + F_2(\xi, \vec{v}),$$

$$H_3(\xi, u, \mu, q_3) = \sum_{i=1}^{b} \mu_i(\xi)\psi_i(\xi; q_3(\xi)) + \int\limits_{t_0}^{t_{N+1}} F_3(t, \xi; u, q_3)dt,$$

$q^{(0)} = \left(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)}\right)$ – оптимальне керування, $u(t, x; q^{(0)})$ – оптимальний розв'язок задачі (4.49)–(4.52).

Правильна така теорема.

Теорема 4.18 *Нехай виконані умови а)–в). Тоді*

1) якщо $D_{q_l}H_l > 0$, $l \in \{1, 2, 3\}$, *то оптимальне керування* $q^{(0)} = (\nu_{11}, \nu_{21}, \nu_{31})$*;*

2) якщо $D_{q_l}H_l > 0$, $l \in \{1, 2\}$, $\partial_{q_3}H_3 < 0$, *то оптимальне керування* $q^{(0)} = (\nu_{11}, \nu_{21}, \nu_{32})$*;*

3) якщо $D_{q_1}H_1 > 0$, $D_{q_2}H_2 < 0$, $D_{q_3}H_3 < 0$, *то оптимальне керування* $q^{(0)} = (\nu_{11}, \nu_{22}, \nu_{32})$*;*

4)якщо $D_{q_l}H_l < 0$, $l \in \{1, 2, 3\}$, *то оптимальне керування* $q^{(0)} = (\nu_{12}, \nu_{22}, \nu_{32})$*.*

Нехай умови Теореми 4.18 не виконані. Тоді правильне таке твердження.

Теорема 4.19 *Нехай виконані умови а)–в). Для того, щоб керування* $q^{(0)} = \left(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, q_3^{(0)}\right)$ *було оптимальним, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови:*

1) функції $H_l(\xi, u, \lambda_l, q_k)$, $l \in \{1, 2\}$, $H_3(\xi, u, \mu, q_3)$ *за аргументами* q_k, $k \in \{1, 2, 3\}$ *мають в точці* $q_k^{(0)}$ *мінімальні значення;*

2) для довільного вектора $\left(l_m^{(1)}, l_m^{(2)}\right) \neq 0$ *виконуєтьcя нерівність*

$$D_u^2 F_m\left(t, x; u, q_m^{(0)}\right)\left(l_m^{(1)}\right)^2 + 2D_u D_{q_m} F_m\left(t, x; u, q_m^{(0)}\right) l_m^{(1)} l_m^{(2)} +$$

$$+ D_{q_m}^2 F_m\left(t, x; u, q_m^{(0)}\right)\left(l_m^{(2)}\right)^2 > 0, \ m \in \{1, 3\};$$

3) для довільного вектора $(l_1, l_2, \ldots, l_{N+1}) \neq 0$ *виконувалась нерівність*

$$\sum_{ij=1}^{N+1} D_{v_i v_j}^2 F_2(x, \vec{v}) l_i l_j > 0.$$

Доведення Теореми 4.19 проводиться за допомогою методики доведення Теореми 2.14 [68].

Висновки до розділу

Досліджені багатоточкові задачі Коші, Діріхле та задача зі скісною похідною для параболічного рівняння, коефіцієнти якого вироджуються довільним чином за часовою змінною у фіксований момент часу та просторовими змінними на деякій множині точок.

При цьому, одержані такі результати:

- встановлено існування та оцінка розв'язку багатоточкової задачі Коші для параболічного рівняння, коефіцієнти якого мають довільні степеневі особливості за часовою і просторовими змінними;

- встановлена коректна розв'язність першої крайової задачі для параболічного рівняння, коефіцієнти якого мають степеневі особливості довільного порядку за часовою та просторовимм змінними;

- знайдено умови існування та єдиності розв'язку задачі зі скісною похідною для виродженого параболічного рівняння зі степеневими особливостями в коефіцієнтах рівняння та крайової умови.

Для задачі оптимального керування системою, яка описується задачею зі скісною похідною та інтегральною умовою за часовою змінною для виродженого параболічного рівняння другого порядку:

- встановлено існування та знайдено оцінки її розв'язку;

- сформульовані необхідні та достатні умови існування розв'язку цієї задачі та аналогічної задачі для 2b-параболічних рівнянь.

Результати п.п. 4.1–4.3 одержані І.Д. Пукальським разом з Б.О. Яшаном в [72, 74, 89, 77, 90, 76, 117, 118, 119, 72] а п. 4.4 і п. 4.5 – І.Д. Пукальським разом з І.П. Лусте в [73, 29, 121, 69, 67].

Розділ 5

ЗАДАЧІ ТЕРМОЕЛЕКТРИКИ

У цьому розділі розв'язується обернена задача термоелектрики в зонально-неоднорідному середовищі на основі узагальненого підходу до опису термоелектричного поля. Вивчається можливість керувати вихровими термоелектричними струмами в такому середовищі. Знайдено аналітичний розв'язок цієї задачі та розроблено числовий метод знайходження його наближеного значення.

Також, розглянуто побудову утворюючої функції термоелектричного поля для двовимірного гіротропного середовища, яка спрощує знаходження розподілів температури, потенціалу і струму, необхідних для створення гіротропних термоелементів. Розглянуто приклади використання утворюючої функції для знаходження вихрових струмів у плоскому гіротропному середовищі.

5.1 Обернена задача термоелектрики для зонально-неоднорідного середовища

5.1.1 Вступ

В роботах [3, 4, 51, 52, 104] були створені узагальнені теоретичні засади опису термоелектричного поля і технологія винайдення нових типів термоелементів. Основою цих засад є методи керування вихровими термоелектричними струмами у неоднорідних та анізотропних термоелектричних середовищах.

На відміну від прямих задач теорії векторних полів у термоелектричному середовищі, обернені задачі полягають у знаходженні умов, за яких виникають наперед задані розподіли густини вихрових термоелектричних струмів $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r})$, де векторна функція $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ радіус-вектора $\mathbf{r}$ наперед задана. Метою даної роботи є обгрунтування коректності постановки розв'язків обернених задач термоелектрики, з'ясування існування і єдиності розв'язків цих задач, пошук методів знаходження їхніх розв'язків для неоднорідних, гіротропних і анізотропних середовищ.

В загальному випадку обернена задача термоелектрики формулюється в такий спосіб. Задано в просторі однозв'язну область D, заповнену провідним середовищем, яке характеризується тензорами питомого електричного опору $\hat{\rho}(\mathbf{r})$, термоЕРС $\hat{\alpha}(\mathbf{r})$, що відомим чином залежать від радіус-вектора $\mathbf{r}$. В цій області D задано векторне поле густини струму у вигляді неперервної функції $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r})$.

Обернена задача термоелектрики полягає у побудові скалярного поля температур $T(\mathbf{r})$ (або векторного поля градієнту температури $\nabla T(\mathbf{r})$), що з необхідністю призводить до створення в області D заданого розподілу струмів.

У стаціонарних умовах $\mathrm{rot}\hat{\alpha}\nabla T = -\mathbf{J}(\mathbf{r})$, де векторне поле $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\,(\hat{\rho}\mathbf{j}(\mathbf{r}))$ відоме, оскільки відомі $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ і $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. При цьому $\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\Pi\delta(\mathbf{r})$, де $\delta(\mathbf{r})$ – густина електричних зарядів.

Таким чином, для векторного поля $\hat{\alpha}(\mathbf{r})\nabla T$ однозначно визначені дві диференціальні величини – ротор і дивергенція цього поля. З теорії векторних полів відома теорема Гельмгольца, яка твердить, що задача знаходження невідомого векторного поля є коректною, якщо відомі його ротор і дивергенція. Отже, буде коректною і задача пошуку поля градієнта температури $\nabla T(\mathbf{r})$ і розподілу температур $T(\mathbf{r})$, оскільки ці величини завжди можна визначити з $\hat{\alpha}(\mathbf{r})\nabla T$ для відомого $\hat{\alpha}(\mathbf{r})$. Тим самим доведено коректність постановки оберненої задачі термоелектрики і той факт, що її рішення існує, якщо наперед заданий розподіл струмів задовольняє закон збереження заряду. Доведено також, що розв'язок оберненої задачі термоелектрики є єдиним, але з точністю до довільного пасивного розподілу температур $T_\rho(\mathbf{r})$. Частинні розв'язки залежать від структури тензорів $\hat{\alpha}(\mathbf{r})$, $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ і знаходяться різними методами для середовищ різного характеру (неоднорідного, гіротропного, анізотропного).

Розв'язки ОЗТ дозволяють у відповідності з розробленою у [3, 52] технологією винайдення термоелементів визначати з узагальненої моделі термоелектричного перетворювача енергії конфігурацію робочого тіла термоелемента, розташування нагрівників і охолоджувачів на його поверхні, та розміщення електричних контактів термоелемента з зовнішнім колом на еквіпотенціальних та ізотермічних поверхнях.

У цьому розділі розглянуто аналітичні та чисельні методи розв'язання ОЗТ для зонально-неоднорідних середовищ модельної структури.

В найбільш загальній фізичній моделі неоднорідного середовища кінетичні коефіцієнти α, σ, κ є функціями просторових координат x, y, z. У зональнонеоднорідному середовищі ці функції є функціями Хевісайда, що в межах кожної зони від просторових координат явно не залежать і мають скінчений стрибок на границях зон. Для подальшого аналізу використано двокомпонентну фізичну модель зонально-неоднорідного середовища, що складається з двох зон і характеризується кінетичними коефіцієнтами α_1, σ_1, κ_1 та α_2, σ_2, κ_2. Саме для такого середовища у цьому розділі буде знайдено розв'язки ОЗТ.

5.1.2 Необхідність застосування узагальненої технології винайдення нових типів термоелементів до зонально-неоднорідного термоелемента

На основі узагальненої теорії термоелектричного перетворення енергії, розвинутої в роботах [3, 4, 51] розроблена методика винайдення термоелектричних перетворювачів енергії.

Першим кроком методики є вибір початкових умов, до яких належать вибір термоелектричного середовища під дією зовнішніх фізичних полів (магнітного, електричного, поля механічних напруг), а також вибір конфігурації струму, що протікає в термоелементі. Вибір конфігурації струму залежить від багатьох фізичних, технологічних, експлуатаційних та інших конкретних вимог до термоелемента. Зокрема такий вибір залежить від умов сполучення термоелемента із джерелами та витоками тепла, а також із зовнішнім електричним колом.

Розв'язання оберненої задачі термоелектрики для заданих вихідних умов є другим кроком методики. Ця задача полягає у визначенні розподілу температур, яким досягається необхідна наперед задана конфігурація термоелектричного струму у термоелементі. При відомому вже розподілі температури можуть бути знайдені і розподіли теплових потоків $q_n(\xi)|_\Gamma$ на межі Γ перетворювача з умови

$$q_n(\xi)|_\Gamma = \left.\frac{\partial T(\xi)}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma, \tag{5.1}$$

де ξ – координата на межі середовища, $\vec{n}$ – нормаль до межі. З умови (5.1) визначаються вимоги до джерел тепла і тепловідводів, що є третім кроком методики.

Четвертим кроком методики є знаходження розподілу електричного потенціалу в термоелементі за відомими розподілами температур і струмів.

В розподілах температури й електричного потенціалу знаходять лінії (поверхні), які є одночасно ізотермічними й еквіпотенціальними. Цей пошук є п'ятим кроком методики.

Нарешті, з множини ізотерм та еквіпотенціалей визначається місце в термоелектричному середовищі, звідки відводиться електричний струм у зовнішнє коло. Цим шостим кроком завершується винайдення термоелемента.

Історично склалася така ситуація, що зонально-неоднорідний термоелемент був винайдений без повного виконання усіх шести кроків такої технології. Тому повторне винайдення ЗНТ за технологією необхідно виконати не тільки для повноти теоретичного обґрунтування конструкцій нових типів термоелементів, але й для виявлення особливостей ЗНТ, які не очевидні в рамках традиційного евристичного підходу. На цім шляху буде показано, що традиційна термопара є одним з частинних випадків зонально-неоднорідного термоелемента.

5.1.3 Розв'язання оберненої задачі термоелектрики для зонально-неоднорідного середовища

Використання такої методики для зонально-неоднорідного термоелемента потребує розв'язку оберненої задачі термоелектрики для зонально-неоднорідного середовища. Розв'язання цієї задачі подано нижче.

Аналітичний розв'язок оберненої задачі термоелектрики для зонально-неоднорідного середовища

В роботах [2, 3, 4, 51, 96] були отримані аналітичні розв'язки оберненої задачі термоелектрики для неоднорідних середовищ, коефіцієнт Зеєбека яких є неперервною функцією просторових координат. Використаємо ці результати, розглядаючи зонально-неоднорідне середовище як граничний випадок неперервного неоднорідного середовища.

В роботі [51] розв'язок оберненої задачі термоелектрики для неоднорідного середовища отримано у вигляді

$$T(\mathbf{r}) = f(\alpha) + \int_0^r \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{J}}{\mathbf{A}^2} d\mathbf{r}, \tag{5.2}$$

де $\mathbf{A} = \nabla \alpha(\mathbf{r})$, $\mathbf{J} = \mathrm{rot}(\rho(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}))$, $\rho(\mathbf{r})$ – питомий опір середовища, $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ – густина електричного струму, $\mathbf{r}$ – просторова координата, $f(\alpha)$ – пасивне температурне поле, яке не призводить до виникнення вихрових термоелектричних струмів.

Введемо векторний потенціал $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{j} = \mathrm{rot}\, \mathbf{H},$$

$$\Delta \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{j}.$$

Для двовимірного середовища вектор $\mathbf{H}$ містить тільки одну компоненту H_z. Функцію $H_z(x, y)$ називають функцією Лукоша. Лінії $H_z(x, y)$ =const є лініями струму. Функцію Лукоша використовуватимемо для опису конфігурації вихрових термоелектричних струмів та позначатимемо надалі $H(x, y)$.

Знайдемо аналітичний вираз для розподілу температури в зонально-неоднорідній пластині, який буде призводити до виникнення в ній вихрових струмів заданої конфігурації. Не зменшуючи істотно загальність аналізу, вважатимемо електропровідність пластини σ постійною, а коефіцієнт термоЕРС α одномірно-неоднорідним $\alpha = \alpha(x)$. З урахуванням вищесказаного співвідношення (5.2) набуде вигляду:

$$T(x, y) = f(x) + \left(\sigma \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^{-1} \int \Delta H(x, y) dy. \tag{5.3}$$

Коефіцієнт термоЕРС для зонально-неоднорідного середовища змоделюємо одномірно-неоднорідним та неперервним. Для цього використаємо відоме наближення одномірних функцій Хевісайда оберненою тригонометричною функцією [51]

$$\alpha(x) = \frac{2}{\pi} \alpha_0 \arctan\left(\frac{x}{d_0}\right), \tag{5.4}$$

де α_0 – модуль термоЕРС пластини, d_0 – товщина перехідного шару, $d_0 \to 0$.

У граничному випадку, коли величина d_0 буде прямувати до нуля, отримаємо розподіл коефіцієнта термоЕРС для зонально-неоднорідного середовища.

З урахуванням (5.3), (5.4) розв'язок оберненої задачі термоелектрики для двокомпонентного зонально-неоднорідного середовища з плоскою межею зон при $x = 0$ набуває вигляду

$$T(x, y) = \frac{\pi \left(d_0^2 + x^2\right)}{2 \alpha_0 d_0 \sigma} \int \Delta H(x, y) dy. \tag{5.5}$$

Чисельні методи розв'язання оберненої задачі термоелектрики для зонально-неоднорідного середовища

Як зазначалося у п. 5.1.2, на основі аналогії явищ електромагнітної індукції Фарадея і вихрових термоелектричних струмів розроблено методику [3] пошуку принципово нових типів термоелементів шляхом керування конфігурацією і просторовим розподілом вихрових термоелектричних струмів. Математичні проблеми зводяться до розв'язку обернених задач термоелектрики, тобто знаходженні умов, за яких у середовищі виникають попередньо задані розподіли густини вихрових термоелектричних струмів

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \tag{5.6}$$

де векторна функція $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ радіуса-вектора $\mathbf{r}$ наперед задана. Розв'язком обернених задач є такі розподіли температур $T(\mathbf{r})$, що призводять до збудження в середовищі вихрових струмів (5.6). У більшості випадків знаходження розв'язків таких задач через їхню складність можливе тільки комп'ютерними засобами. Тому виникає необхідність розробки комп'ютерної технології керування вихровими струмами в термоелектричних середовищах. Нижче наведено фізичні основи алгоритму керування вихровими термоелектричними струмами і блок-схему алгоритму.

Фізичні основи алгоритму керування вихровими термоелектричними струмами і блок-схема алгоритму для довільного неоднорідного та анізотропного середовища

Усі комп'ютерні розрахунки доцільно проводити в безрозмірних параметрах і змінних. Це дозволяє уникнути зайвих повторень обчислювальних процедур у самому коді програми і, крім того, скорочує процес програмування.

Уведемо безрозмірні параметри, ґрунтуючись на фізичних критеріях подібності електричних, теплових і термоелектричних явищ у довільному неоднорідному й анізотропному середовищі [51]

- безрозмірна густина струму

$$\mathbf{i} = \frac{\Pi^* \mathbf{j}}{\kappa^* t},$$

- безрозмірне електричне поле

$$\mathbf{e} = \frac{\Pi^*}{\rho^* \kappa} \frac{\mathbf{E}}{t},$$

- безрозмірний тепловий потік

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{q}}{\kappa^* t},$$

де t – модуль вектора ∇T.

Тоді закони Ома і Фур'є можна представити в безрозмірному вигляді

$$\mathbf{e} = \hat{R}\mathbf{i} + Z^* T \hat{A} \mathbf{t}_0,$$

$$\mathbf{k} = \hat{\pi}\mathbf{i} - \hat{\Theta}\mathbf{t}_0,$$

де введено тензори матеріальних констант

- безрозмірної термоЕРС

$$\hat{A} = \frac{\hat{\alpha}}{\alpha^*},$$

- безрозмірного питомого опору

$$\hat{R} = \frac{\hat{\rho}}{\rho^*},$$

- безрозмірної електропровідності

$$\hat{\Sigma} = \frac{\hat{\sigma}}{\sigma^*}.$$

У наведених вище формулах використано позначення, введені в [51].

Безрозмірні параметри і змінні істотно спрощують вигляд диференціальних рівнянь для постановки і розв'язку обернених задач. Так, для однорідного анізотропного середовища можна записати систему диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку

$$\begin{array}{ll} -H_y = S_x, & H_x = D_y, \\ S = U + T, & D = U - T, \end{array} \tag{5.7}$$

де H – безрозмірний векторний потенціал Лукоша, U – безрозмірний електрохімічний потенціал, T – безрозмірна температура.

Розв'язок оберненої задачі термоелектрики в цьому випадку знаходиться простим інтегруванням (5.7) і має вигляд

$$T = -\frac{1}{2}\left\{\int\limits_0^y H_x(x,\eta)d\eta + \int\limits_0^x H_y(\xi,y)d\xi\right\} + Y(y) - X(x),$$

причому розподіл потенціалів також можна отримати в квадратурах з

$$U = \frac{1}{2}\left\{\int\limits_0^x H_x(x,\eta)d\eta - \int\limits_0^y H_y(\xi,y)d\xi\right\} + Y(y) + X(x),$$

де $X(x)$, $Y(y)$ – довільні функції своїх аргументів. Цей приклад показує, що в алгоритмі комп'ютерного розв'язку задачі керування вихровими струмами необхідно передбачити не тільки чисельні методи представлення й оперування вихідними даними, але і символьні, що реалізують в комп'ютері аналітичні прийоми диференціювання й інтегрування.

Вихідний розподіл струмів (5.6) можна вводити або як масив чисел, або у вигляді аналітичного виразу (формули). Інтерпретатор аналітичних виразів розпізнає введену формулу і передає інформацію аналізатору можливості розв'язати задачу аналітичними методами. Якщо такої можливості немає, то задача розв'язується методом кінцевих елементів по лівій вітці алгоритму, що активізується і при введенні вихідних даних у чисельному вигляді. При позитивному рішенні аналізатора хід процесу йде по правій вітці алгоритму. Обидві вітки виходять на генератор звіту про отриманий розв'язок, що виводить результати в графічних і цифрових форматах як для стандартної консолі виводу (екран, принтер), так і для експериментальної установки, що реалізує в зразку знайдений розподіл температур.

5.2 Утворююча функція для термоелектричного поля

5.2.1 Вступ

Загальна характеристика проблеми. Стан термоелектричного середовища описується трьома функціями просторових координат: розподілом температури $T(x, y, z)$, електро-хімічного потенціалу $U(x, y, z)$ і векторним потенціалом густини струму $H(x, y, z)$. При постановці і вирішенні варіаційних задач ця обставина створює значні труднощі, оскільки підінтегральні вирази відповідних функціоналів, як правило, виражаються через дві або три із зазначених функцій, а взаємозв'язок між ними визначається системою крайових задач. Ця проблема вирішується введенням утворюючої функції.

В роботі [2] показано, що зручно ввести одну функцію просторових координат – утворюючу функцію $F(x, y, z)$, діючи на яку певними операторами, можна отримати функції $T(x, y, z)$, $U(x, y, z)$, $H(x, y, z)$. Таку функцію побудовано для випадку неоднорідного ізотропного та однорідного анізотропного із симетричним тензором термоЕРС середовищ, але для гіротропного середовища утворюючої функції в явному вигляді ще не було визначено.

В даному розділі розглянуто побудову утворюючої функції термоелектричного поля для двовимірного гіротропного середовища, яка спрощує знаходження розподілів температури, потенціалу і струму, необхідних для створення гіротропних термоелементів. Розглянуто приклади використання утворюючої функції для знаходження вихрових струмів у плоскому гіротропному середовищі.

5.2.2 Загальні рівняння термоелектричного поля для гіротропного середовища

Згідно [96] в середовищі, в якому присутні градієнт температури і магнітне поле, перпендикулярне до градієнта температури, виникають вихрові термоелектричні струми, перпендикулярні до магнітного поля. Запишемо узагальнений закон Ома для термоелектрики

$$j_i = \sigma_{ik}\varepsilon_k - \sigma_{ik}\alpha_{km}\frac{\partial T}{\partial x_m}, \tag{5.8}$$

де j_i, компонента вектора густини струму, σ_{ik} – компонента тензора питомої електро-провідності, α_{km} – компонента тензора термоЕРС, ε_k – компонента напруженості електричного поля, T – температура, x_m – декартові координати.

Структура тензорів α_{ik}, σ_{ik} в декартовій системі координат для гіротропного середовища, коли магнітне поле напрямлене по осі z, така:

$$\beta_{ik} = \begin{pmatrix} \beta_0 & \beta_a & 0 \\ -\beta_a & \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_\perp \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

де β_{ik} – тензор матеріальних констант середовища, β_0, β_a – діагональна і недіагональна компоненти тензора β_{ik}, $\beta_\perp$ – значення тензора матеріальних констант, що відповідають z напрямку.

Тоді рівняння (5.8) з врахуванням (5.9) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} j_x = -\sigma_0\dfrac{\partial U}{\partial x} - \sigma_a\dfrac{\partial U}{\partial y} - [\alpha_0\sigma_0 - \alpha_a\sigma_a]\dfrac{\partial T}{\partial x} - [\alpha_a\sigma_0 + \alpha_0\sigma_a]\dfrac{\partial T}{\partial y}, \\ j_y = \sigma_a\dfrac{\partial U}{\partial x} - \sigma_0\dfrac{\partial U}{\partial y} + [\alpha_a\sigma_0 + \alpha_0\sigma_a]\dfrac{\partial T}{\partial x} - [\alpha_0\sigma_0 - \alpha_0\sigma_a]\dfrac{\partial T}{\partial y}, \\ j_z = -\sigma_\perp\dfrac{\partial U}{\partial z} - \sigma_\perp\alpha_\perp\dfrac{\partial T}{\partial z}, \end{cases} \tag{5.10}$$

де U – електричний потенціал, α_0, σ_0, α_a, σ_a – відповідно діагональні і недіагональні компоненти тензорів термоЕРС і питомої електропровідності.

5.2.3 Утворююча функція

Розглянемо двовимірний випадок ($j_z = 0$). Введемо функцію струму Лукоша

$$j_x = \frac{\partial H}{\partial y}, j_y = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{5.11}$$

Два перші рівняння системи (5.10) перепишемо наступним чином:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial y} = -\sigma_0\dfrac{\partial U}{\partial x} - \sigma_a\dfrac{\partial U}{\partial y} - [\alpha_0\sigma_0 - \alpha_a\sigma_a]\,\dfrac{\partial T}{\partial x} - [\alpha_a\sigma_0 - \alpha_0\sigma_a]\,\dfrac{\partial T}{\partial y}, \\ -\dfrac{\partial H}{\partial x} = \sigma_a\dfrac{\partial U}{\partial x} - \sigma_0\dfrac{\partial U}{\partial y} + [\alpha_a\sigma_0 - \alpha_0\sigma_a]\,\dfrac{\partial T}{\partial x} - [\alpha_0\sigma_0 - \alpha_a\sigma_a]\,\dfrac{\partial T}{\partial y}, \end{cases} \tag{5.12}$$

Знайдемо частковий розв'язок системи (5.12). Для цього будемо шукати функції U, H, T у вигляді

$$\begin{cases} U = C_1F, \\ H = C_2F, \\ T = F, \end{cases} \tag{5.13}$$

де C_1, C_2 – невідомі константи, F – утворююча функція. Підставивши (5.13) в (5.12) і позначимо

$$C_1 = \alpha_0 - \frac{\sigma_a}{\sigma_0}\alpha_a, \quad C_2 = -\left(\sigma_0\alpha_a + \frac{\sigma_a^2\alpha_a}{\sigma_0}\right).$$

Виключивши з (5.13) функцію F, запишемо

$$\begin{cases} U = \left(\alpha_0 - \dfrac{\sigma_a}{\sigma_0}\alpha_a\right)T, \\ H = -\left(\sigma_0\alpha_a + \dfrac{\sigma_a^2\alpha_a}{\sigma_0}\right)T. \end{cases} \tag{5.14}$$

Система (5.14) – частковий розв'язок системи (5.12). Загальний розв'язок (5.12) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} U(x,y) = C_1T(x,y) + \Psi(x,y), \\ H(x,y) = C_2T(x,y) + \Phi(x,y), \end{cases} \tag{5.15}$$

де $\Psi(x,y)$, $\Phi(x,y)$ – невідомі функції. Підставивши (5.15) в (5.12), отримаємо рівняння для знаходження $\Psi(x,y)$ і $\Phi(x,y)$

$$\Phi_y = -\sigma_0\Psi_x - \sigma_a\Psi_y, \tag{5.16}$$

$$-\Phi_x = \sigma_a\Psi_x - \sigma_0\Psi_y, \tag{5.17}$$

де нижні індекси функцій означають похідну по відповідній змінній. Продиференціюємо (5.16) по x, а (5.17) – по y і додамо їх. Отримаємо

$$\Delta\Psi(x,y) = 0, \tag{5.18}$$

де Δ – оператор Лапласа. Продиференціюємо (5.16) по y, а (5.17) – по x, і віднімемо їх. Отримаємо

$$\Delta\Phi(x,y) = 0. \tag{5.19}$$

Функції $\Psi(x,y)$, $\Phi(x,y)$ – гармонічні. Зауважимо, що оскільки $\Psi(x,y)$ і $\Phi(x,y)$ довільні гармонічні функції, то систему (5.15) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} U(x,y) = \dfrac{C_1}{C_2} H(x,y) + \Psi(x,y), \\ T(x,y) = \dfrac{1}{C_2} H(x,y) + \Phi(x,y) \end{cases} \tag{5.20}$$

або

$$\begin{cases} H(x,y) = \dfrac{C_2}{C_1} U(x,y) + \Psi(x,y), \\ T(x,y) = \dfrac{1}{C_1} U(x,y) + \Phi(x,y) \end{cases}$$

Функції $\Psi(x,y)$ і $\Phi(x,y)$ знаходимо з (5.18) і (5.19), відповідно.

Утворюючою функцією для термоелектричного поля може бути будь-яка із функцій T, U, H. При цьому дві інші функції виражатимуться через неї з точністю до невідомих гармонічних функцій, які знаходяться з граничних умов.

5.2.4 Приклади вихрових струмів в плоскому гіротропному середовищі

Приклад 1. Густина вихрових струмів в плоскому гіротропному середовищі зменшується вздовж радіуса r в полярній системі координат (r,φ). Це ускладнює їх використання. Тому з технічної точки зору доцільно знайти такі умови, за яких густина вихрових струмів буде постійною по азимуту φ, тобто $j_\varphi = \text{const}$. Оскільки в полярній системі координат (5.11) має вигляд

$$j_r = \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad j_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial r},$$

то це можливо, якщо

$$H(r) = Cr,$$

де C – константа. Тоді зручно використати (5.20). Внаслідок симетрії задачі, H і T не залежатимуть від азимута φ і розв'язок запишеться у вигляді

$$\Psi(r) = k_1 \ln r + k_2,$$
$$\Phi(r) = d_1 \ln r + d_2,$$

де k_1, k_2, d_1, d_2 – невідомі константи. Вибравши граничні умови

$$T(r_1,\varphi) = T_1, \quad T(r_2,\varphi) = T_2, \quad U(r_1,\varphi) = U_1, \quad U(r_2,\varphi) = U_2, \tag{5.21}$$

знайдемо

$$T(r) = \left[\frac{(T_1 - T_2) + \frac{C}{C_2}(r_2 - r_1)}{\ln \frac{r_1}{r_2}}\right] \ln r + \frac{C}{C_2} r + \frac{\left(\frac{T_1}{\ln r_1} - \frac{T_2}{\ln r_2}\right) + \frac{C}{C_2}\left(\frac{r_2}{\ln r_2} - \frac{r_1}{\ln r_1}\right)}{\left(\frac{1}{\ln r_1} - \frac{1}{\ln r_2}\right)}, \tag{5.22}$$

$$U(r) = \left[\frac{(U_1 - U_2) + \frac{C}{C_2}(r_2 - r_1)}{\ln \frac{r_1}{r_2}}\right] \ln r + \frac{C}{C_2} r + \frac{\left(\frac{U_1}{\ln r_1} - \frac{U_2}{\ln r_2}\right) + \frac{C}{C_2}\left(\frac{r_2}{\ln r_2} - \frac{r_1}{\ln r_1}\right)}{\left(\frac{1}{\ln r_1} - \frac{1}{\ln r_2}\right)}. \tag{5.23}$$

Із аналізу (5.22) і (5.23) випливає, що за відсутності зовнішньої різниці температур і напруг $T_1 = T_2 = T$, $U_1 = U_2 = U$ (5.22) і (5.23) не зануляються: в даному випадку в середовищі існують внутрішні джерела тепла і напруги.

Приклад 2. Розглянемо випадок, коли струм тече тільки вздовж r, тобто $j_\varphi = 0$. Виберемо функцію H у вигляді

$$H(\varphi) = K\varphi,$$

де K – константа. Тоді $j_r = \dfrac{K}{r}$. Вважаючи, що U, T не залежатимуть від r, розв'язок набуде вигляду

$$\Psi(\varphi) = g_1\varphi + g_2,$$
$$\Phi(\varphi) = h_1\varphi + h_2,$$

де g_1, g_2, h_1, h_2 – невідомі константи. Виберемо граничні умови

$$T(r,\varphi)|_{\varphi=0} = T_0, \quad T(r,\varphi)|_{\varphi=2\pi} = T_1, \quad U(r,\varphi)|_{\varphi=0} = U_0, \quad U(r,\varphi)|_{\varphi=2\pi} = U_1.$$

Тоді

$$T(\varphi) = \frac{(T_1 - T_0)}{2\pi}\varphi + T_0,$$
$$U(\varphi) = \frac{(U_1 - U_0)}{2\pi}\varphi + U_0.$$

Наведені приклади демонструють можливість використання утворюючої функції для знаходження вихрових струмів у гіротропному середовищі.

Висновки до розділу

Узагальнений підхід до опису термоелектричного поля дозволив вперше отримати аналітичні розв'язки ОЗТ у вигляді (5.3)-(5.5), що дає можливість керувати вихровими термоелектричними струмами у зонально-неоднорідному середовищі.

Утворюючою функцією термоелектричного поля для двовимірного гіротропного середовища є будь-яка із трьох функцій H, U, T, а дві інші виражатимуться через неї з точністю до невідомих гармонічних функцій, які знаходяться з граничних умов для кожного окремого випадку.

Одержані результати дозволяють отримати необхідний розподіл струмів для розв'язку прикладних технічних задач.

Результати цього розділу одержані І.П. Лусте разом із О.Я. Лусте, опубліковані в [54, 112, 113].

Розділ 6

ЕВОЛЮЦІЙНІ ЗАДАЧІ ТА РІВНЯННЯ

У цьому розділі розглядається задача Коші для параболічного рівняння, молодші коефіцієнти якого є компонентами просторової змінної і яке містить оператори Бесселя. Для цієї задачі методом комбінованого перетворення Фур'є-Бесселя знайдено явний вигляд та оцінки похідних фундаментального розв'язку. Моделюються динамічні процеси методом гібридних інтегральних перетворень типу Ейлера, Бесселя на кусково-однорідних інтервалах. Здійснено постановку і розв'язано стохастичну m-точкову за часом задачу Коші для параболічного рівняння вищого порядку із збуреннями типу "білого шуму"з від'ємними значеннями.

6.1 Задача Коші для параболічного рівняння з операторами Бесселя й зростаючими коефіцієнтами

6.1.1 Попередні відомості. Постановка задачі

Теорія задачі Коші для рівномірно параболічних рівнянь другого порядку з обмеженими коефіцієнтами достатньо повно досліджена [85, 102], на відміну від таких рівнянь з необмеженими коефіцієнтами. Одним з напрямків досліджень професора С.Д. Івасишена та учнів його наукової школи є знаходження фундаментальних розв'язків та дослідження коректності задачі Коші для класів вироджених рівнянь, які є узагальненнями класичного рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова і містять за основними змінними диференціальні вирази, параболічні за І.Г. Петровським та за С.Д. Ейдельманом (С.Д. Івасишен, Л.М. Андросова, І.П. Мединський, О.Г. Возняк, В.С. Дронь, В.В. Лаюк, Г.С. Пасічник та інші). Також досліджувалися параболічні за І.Г. Петровським рівняння і системи з оператором Бесселя (С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Т.М. Балабушенко, Л.М. Мельничук). Деякі результати цих досліджень наведені в [105, 5, 6, 56, 27].

Зокрема, у статті [6] знайдено явний вигляд та встановлено властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння другого порядку відносно функції $u = u(t,x,y)$

$$\partial_t u = \sum_{j,l=1}^{n} \partial_{x_j}\partial_{x_l}(a_{jl}u) + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j u) + B_y u, t > 0, x \in \mathbb{R}^n, y > 0,$$

де всі a_{jl} сталі, а матриця $(a_{jl})_{j,l=1}^n$ симетрична і додатно визначена; $B_y \equiv \partial_y^2 + \dfrac{2\nu+1}{y}dy$ – оператор Бесселя порядку $\nu \geq 0$. У статті [56] рівняння містить суму операторів Бесселя по змінних y_j однакового порядку ν.

У даному пункті деякі вказані результати поширюються на клас рівнянь із зростаючими коефіцієнтами у молодших доданках, які містять оператори Бесселя по кількох змінних y_j різних порядків ν_j.

Нехай n, k, m – задані натуральні числа, $k \leq n$; $x' \equiv (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $x'' \equiv (x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$, $x \equiv (x', x'')$, $y \equiv (y_1, \dots, y_m) \subset \mathbb{R}_+^m$, де $\mathbb{R}_+^m := \{y \in \mathbb{R}^m \,|\, y_j > 0, j \in \{1, \dots, m\}\}$; $\mathbb{R}_+^{n+m} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$.

Розглянемо задачу Коші

$$\partial_t u(t,x,y) = a^2 \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 u + b \sum_{j=1}^{k} \partial_{x_j}(x_j u) + p \sum_{j=1}^{m} B_{y_j} u,$$

$$t > 0, (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}, \tag{6.1}$$

$$u(t,x,y)\Big|_{t=0} = \varphi(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+m}, \tag{6.2}$$

$$\partial_{y_j} u(t,x,y)\Big|_{y_j=0} = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}^n, y_l > 0 (l \neq j), j \in \{1, \dots, m\}, \tag{6.3}$$

де a, b, p $(p > 0)$ – задані дійсні числа, $B_{y_j} \equiv \partial_{y_j}^2 + \dfrac{2\nu_j+1}{y_j}\partial_{y_j}$ – оператори Бесселя за змінними y_j порядків $\nu_j \geq 0$, $j \in \{1, \dots, m\}$.

Вважаємо, що рівняння (6.1) є параболічним. Це рівняння має необмежені при $|x| \to \infty$ коефіцієнти біля перших похідних $\partial_{x_j} u$ та необмежені в околі точки $y = 0$ коефіцієнти при похідних $\partial_{y_j} u$.

Позначимо $|\nu| := \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m$. Визначимо обернене перетворення Фур'є-Бесселя функції w: $\mathbb{R}_+^{n+m} \to \mathbb{R}$ рівністю

$$F_{\sigma\to x}^{-1} F_{B,\eta\to y}^{-1}[w(\sigma,\eta)] \equiv F_{\sigma\to x}^{-1}[F_{B,\eta\to y}^{-1}[w(\sigma,y)]],$$

де

$$F^{-1}_{\sigma\to x}[f(\sigma)] = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma)} f(\sigma)d\sigma, x\in\mathbb{R}^n,$$

$$F^{-1}_{B,\eta\to y}[f(\eta)] = \frac{1}{2^{2|\nu|}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma^2(\nu_l+1)}\int\limits_{\mathbb{R}^m_+} f(\eta)J^y_\eta d\eta, y\in\mathbb{R}^m_+,$$

де i – уявна одиниця; $(x,\sigma) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\sigma_j$; $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ – гама-функція Ейлера; $J^y_\eta := \prod\limits_{l=1}^{m} j_{\nu_l}(y_l y_l)\eta_l^{2\nu_l+1}$; $j_{\nu_l}(z) \equiv 2^{\nu_l}\Gamma(\nu_l+1)z^{-\nu_l}J_{\nu_l}(x)$ – нормована функція Бесселя, а $J_{\nu_l}(z)$ – функція Бесселя першого роду порядку ν_l [33].

Пряме перетворення Фур'є-Бесселя функції w таке:

$$F_{x\to\sigma}F_{B,y\to\eta}[w(x,y)] \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} e^{-i(x,\sigma)}w(x,y)J^\eta_y dxdy.$$

6.1.2 Фундаментальний розв'язок та його оцінки

Розв'язок задачі Коші (6.1) – (6.3) шукаємо у вигляді оберненого перетворення Фур'є-Бесселя деякої функції v

$$u(t,x,y) = F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[v(t,\sigma,\eta)] = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)J^y_\eta d\sigma d\eta,$$

$$t>0, (x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}_+, \tag{6.4}$$

де $A(n,\nu) := \dfrac{1}{(2\pi)^n 2^{2|\nu|}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma^2(\nu_l+1)}$.

Вважаючи, що всі операції законні, знайдемо похідні

$$\partial_t u = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} e^{i(x,\sigma)}\partial_t v(t,\sigma,\eta)J^y_\eta d\sigma d\eta; \tag{6.5}$$

$$\partial^2_{x_j} u = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} (-\sigma_j^2)e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)J^y_\eta d\sigma d\eta; \tag{6.6}$$

$$\partial_{x_j}(x_j u) = u + x_j\partial_{x_j}u = u + A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} ix_j\sigma_j e^{i(x,\sigma)}v(t,x,\sigma)J^y_\eta d\sigma d\eta =$$

$$= u + A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} \sigma_j\partial_{\sigma_j}(e^{i(x,\sigma)})v(t,\sigma,\eta)J^y_\eta d\sigma d\eta.$$

Інтегруючи частинами інтеграл по σ_j і вважаючи v такою, що $\lim\limits_{\sigma_j\to\infty} e^{i(x,\sigma)}\sigma_j v = 0$ (наприклад, фінітною), одержимо

$$\partial_{x_j}(x_j u) = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} e^{i(x,\sigma)}(-\sigma_j)\partial_{\sigma_j}vJ^y_\eta d\sigma d\eta. \tag{6.7}$$

$$B_{y_j}u = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)B_{y_j}[J^y_\eta]d\sigma d\eta = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)\times$$

$$\times\Big(\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^m j_{\nu_l}(\eta_l\eta_l)\eta_l^{2\nu_l+1}\Big)B_{y_j}[j_{\nu_j}(\eta_j y_j)]\eta_j^{2\nu_j+1}d\sigma d\eta.$$

Оскільки за [33] $B_y[j_\nu(\nu y)] = -\eta^2 j_\nu(\eta y)$, то

$$B_{y_j}u = A(n,\nu)\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} e^{i(x,\sigma)}v(t,\sigma,\eta)J^y_\eta(-\eta_j^2)d\sigma d\eta. \tag{6.8}$$

Підставивши (6.5)–(6.8) в (6.1) і прирівнявши підінтегральні функції, одержимо рівняння для v

$$\partial_t v(t,\sigma,\eta)+b\sum_{j=1}^k \sigma_j\partial_{\sigma_j}v(t,\sigma,\eta) = (-a^2|\sigma|^2-p|\eta|^2)v(t,\sigma,\eta), t>0, (\sigma,\eta)\in\mathbb{R}^{n+m}_+, \tag{6.9}$$

де $|\sigma|^2 = \sum\limits_{j=1}^n \sigma_j^2$, $|\eta|^2 = \sum\limits_{j=1}^m \eta_j^2$.

Підставимо (6.4) в початкову умову (6.2):

$$u(t,x,y)|_{t=0} = F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[v(0,\sigma,\eta)] = \varphi(x,y), (x,y)\in\mathbb{R}^{n+m}_+.$$

Нехай початкова функція φ така, що для неї існує перетворення Фур'є-Бесселя ψ. Тоді маємо

$$v(t,\sigma,\eta)|_{t=0} = F_{x\to\sigma}F_{B,y\to\eta}[\varphi(x,y)] \equiv \Psi(\sigma,\eta), (\sigma,\eta)\in\mathbb{R}^{n+m}_+. \tag{6.10}$$

Умови (6.3) виконуються, бо за властивістю нормованої функції Бесселя з [33]: $\partial_{y_l} j_{\nu_l}(\eta_l y_l) = 0$, $l \in \{1, \ldots, m\}$.

Задачу (6.9), (6.10) для рівняння з частинними похідними першого порядку розв'яжемо методом характеристик. Відповідна система характеристичних рівнянь така:

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\sigma_1}{b\sigma_1} = \cdots = \frac{d\sigma_k}{b\sigma_k} = \frac{d\sigma_{k+1}}{0} = \cdots =$$

$$= \frac{d\sigma_n}{0} = \frac{d\eta_1}{0} = \cdots = \frac{d\eta_m}{0} = \frac{dv}{(-a^2|\sigma|^2 - p|\eta|^2)v}. \tag{6.11}$$

Розв'яжемо цю систему. Рівняння $bdt = \dfrac{d\sigma_j}{\sigma_j}$ мають розв'язки $\sigma_j = C_j e^{bt}$, $j \in \{1, \cdots k\}$; рівняння $d\sigma_j = 0$ та $d\eta_j = 0$ мають розв'язки відповідно $\sigma_j = C_j$, $j \in \{k+1, \ldots, n\}$ та $\eta_j = \hat{C}_j$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, всі сталі C_j, $\hat{C}_j$ – довільні. Щоб розв'язати останнє рівняння системи (6.11), тобто рівняння

$$(-a^2|\sigma|^2 - p|\eta|^2)dt = \frac{dv}{v},$$

підставимо знайдені вище значення змінних σ_j та η_j:

$$(-a^2(C_1^2 + \cdots + C_k^2)e^{2bt} - a^2(C_{k+1}^2 + \cdots + C_n^2) - p(\hat{C}_1^2 + \cdots + \hat{C}_m^2))dt = \frac{dv}{v}.$$

Зінтегрувавши це рівняння, одержимо

$$-\frac{a^2}{2b}(C_1^2 + \cdots + C_k^2)e^{2bt} - a^2(C_{k+1}^2 + \cdots + C_n^2)t - p(\hat{C}_1^2 + \cdots + \hat{C}_m^2)t = \ln\left|\frac{v}{C_{n+1}}\right|.$$

Підставляючи сюди $C_j = \sigma_j e^{-bt}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, $C_j = \sigma_j$, $j \in \{k+1, \ldots, n\}$, $\hat{C}_j = \eta_j$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, одержимо

$$v = C_{n+1} \exp\left\{ -\frac{a^2}{2b}|\sigma'|^2 - a^2|\sigma''|^2 t - p|\eta|^2 t \right\},$$

де $\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, $\sigma'' = (\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n)$.

Отже, перші інтеграли системи (6.11) такі:

$$\begin{cases} C_j = \sigma_j e^{-bt}, \;\; j \in \{1, \ldots, k\}, \\ C_j = \sigma_j, \;\; j \in \{k+1, \ldots, n\}, \\ \hat{C}_j = \eta_j, \;\; j \in \{1, \ldots, m\}, \\ C_{n+1} = v \exp\left\{\dfrac{a^2}{2b}|\sigma'|^2 + a^2|\sigma''|^2 t + p|\eta|^2 t\right\}. \end{cases} \tag{6.12}$$

Задовольнимо умову (6.10):

$$v|_{t=0} = C_{n+1} \exp\Big\{-\frac{a^2}{2b}|\sigma'|^2\Big\} = \Psi(\sigma, \eta).$$

Оскільки з (6.12) при $t = 0$ маємо, що $\sigma_j = C_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $\eta_j = \hat{C}_j$, $j \in \{1, \dots, m\}$, то з останньої рівності одержимо

$$\Psi(C_1, \dots, C_n, \hat{C}_1, \dots, \hat{C}_m) = C_{n+1} \exp\Big\{-\frac{a^2}{2b}(C_1^2 + \dots + C_k^2)\Big\}.$$

Підставивши тут замість сталих вирази з (6.12), одержимо

$$v(t, \sigma, \eta) = \exp\Big\{-\frac{a^2}{2b}|\sigma'|^2(1 - e^{-2bt}) - a^2|\sigma''|^2 t - p|\eta|^2 t\Big\}\Psi(\sigma' e^{-bt}, \sigma'', \eta) \equiv$$

$$\equiv W(t, \sigma, \eta)\Psi(\sigma' e^{-bt}, \sigma'', \eta), t > 0, (\sigma, \eta) \in \mathbb{R}_+^{n+m}, \tag{6.13}$$

– розв'язок задачі (6.9), (6.10).

Далі будемо використовувати таку властивість оберненого перетворення Фур'є-Бесселя:

$$F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[f_1 \cdot f_2] = F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[f_1] \otimes F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[f_2], \tag{6.14}$$

де згортка $\otimes$ визначається рівністю

$$(g_1 \otimes g_2)(x, y) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} T_y^\eta[g_1(x - \sigma, y)]g_2(\sigma, \eta)\prod_{j=1}^m \eta_j^{2\nu_j+1} d\sigma d\eta, \tag{6.15}$$

а оператор узагальненого зсуву визначимо як суперпозицію таких операторів по кожній компоненті змінної y, тобто

$$T_y^\eta[f(y)] \equiv T_{y_1}^{\eta_1}[T_{y_2}^{\eta_2}[\dots[T_{y_m}^{\eta_m}[f(y)]]\dots]], \{y, \eta\} \subset \mathbb{R}_+^m,$$

тут

$$T_{y_j}^{\eta_j}[f_j(y_j)] \equiv \frac{\Gamma(\nu_j + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu_j + \frac{1}{2})}\int\limits_0^\pi f_j\Big(\sqrt{y_j^2 + \eta_j^2 - 2y_j\eta_j\cos\varphi}\Big)\sin^{2\nu_j}\varphi d\varphi.$$

Зокрема, якщо $f(y) = \prod\limits_{j=1}^m f_j(y_j)$, то $T_y^\eta[f(y)] = \prod\limits_{j=1}^m T_{y_j}^{\eta_j}[f_j(y_j)]$.

Щоб знайти розв'язок u задачі (6.1)– (6.3), підставимо (6.13) у (6.4). На підставі (6.15) одержимо

$$u(t, x, y) = F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[W(t, \sigma, \eta)] \otimes F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[\Psi(\sigma' e^{-bt}, \sigma'', \eta)]. \tag{6.16}$$

Позначимо

$$F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[W(t,\sigma,\eta)] = F^{-1}_{\sigma\to x}\Big[\exp\Big\{-\frac{a^2}{2b}|\sigma'|^2(1-e^{-2bt}) - a^2|\sigma''|^2 t\Big\}\Big]\times$$

$$\times F^{-1}_{B,\eta\to y}[\exp\{-p|\eta|^2 t\}] \equiv W_1(t,x)W_2(t,y). \qquad (6.17)$$

Для обчислення W_1 використаємо інтеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}$. Маємо

$$W_1(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\Big\{i(x,\sigma) - \frac{a^2}{2b}|\sigma'|^2(1-e^{-2bt}) - a^2|\sigma''|^2 t\Big\}d\sigma =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\Big(\prod_{j=1}^{k}\exp\Big\{-\frac{bx_j^2}{2a^2(1-e^{-2bt})}\Big\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\Big(\frac{a\sqrt{1-e^{-2bt}}}{\sqrt{2b}}\sigma_j -$$

$$-i\frac{\sqrt{2b}x_j}{2a\sqrt{1-e^{-2bt}}}\Big)^2\Big\}d\sigma_j\Big)\Big(\prod_{j=k+1}^{n}\exp\Big\{-\frac{x_j^2}{4a^2t}\Big\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{-\Big(a\sqrt{t}\sigma_j - \frac{ix_j}{2a\sqrt{t}}\Big)^2\Big\}d\sigma_j\Big)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\exp\Big\{-\frac{b|x'|^2}{2a^2(1-e^{-2bt})}\Big\}\Big(\frac{\sqrt{2b\pi}}{a\sqrt{1-e^{-2bt}}}\Big)^2\exp\Big\{-\frac{|x''|^2}{4a^2t}\Big\}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\Big)^{n-k} =$$

$$= \frac{(\sqrt{b})^k}{(a\sqrt{2\pi})^k(\sqrt{1-e^{-2bt}})^k}\exp\Big\{-\frac{b|x'|^2}{2a^2(1-e^{-2bt})}\Big\}\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^{n-k}}\exp\Big\{-\frac{|x''|^2}{4a^2t}\Big\}. \qquad (6.18)$$

Обчислимо W_2, використавши відомий інтеграл Вебера з [33], записаний для нормованої функції Бесселя:

$$\int\limits_0^{+\infty}\exp\{-\eta^2 t\}j_\nu(\eta y)\eta^{2\nu+1}d\eta = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2t^{\nu+1}}\exp\Big\{-\frac{y^2}{4t}\Big\}.$$

Тоді одержимо

$$W_2(t,y) = \frac{1}{2^{2|\nu|}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma^2(\nu_l+1)}\int\limits_{\mathbb{R}^m_+}\exp\{-p|\eta|^2 t\}\prod_{l=1}^{m}j_{\nu_l}(\eta_l y_l)\eta_l^{2\nu_l+1}d\eta =$$

$$= \frac{1}{2^{2|\nu|}}\prod_{l=1}^{m}\frac{1}{\Gamma^2(\nu_l+1)}\int\limits_0^{+\infty}\exp\{-p\eta_l^2 t\}j_{\nu_l}(\eta_l y_l)\eta_l^{2\nu_l+1}d\eta_l =$$

$$= \frac{1}{2^{2|\nu|}} \prod_{l=1}^{m} \frac{1}{\Gamma^2(\nu_l+1)} \frac{\Gamma(\nu_l+1)}{2(pt)^{\nu_l+1}} \exp\Big\{ -\frac{y_l^2}{4pt}\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2^{2|\nu|+m}(pt)^{|\nu|+m}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma(\nu_l+1)} \exp\Big\{ -\frac{|y|^2}{4pt}\Big\}. \qquad (6.19)$$

Тепер обчислимо другий множник у (6.16), здійснивши в інтегралі по σ заміну $\beta' = \sigma' e^{-bt}$, $\beta'' = \sigma''$:

$$F^{-1}_{\sigma\to x} F^{-1}_{B,\eta\to y}[\Psi(\sigma' e^{-bt}, \sigma'', \eta)] =$$

$$= A(n,\nu) \int\limits_{\mathbb{R}^m_+} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x', \beta' e^{bt}) + i(x'', \beta'')\} \Psi(\beta, \eta) e^{kbt} d\beta \Big) J^\eta_y d\eta =$$

$$= e^{kbt}\varphi(x' e^{bt}, x'', y), t > 0, (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}_+. \qquad (6.20)$$

Підставивши (6.17) – (6.20) у (6.16) і урахувавши означення згортки (6.15), одержимо

$$u(t,x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} W_1(t, x-\sigma) T^\eta_y [W_2(t,y)] e^{kbt} \varphi(\sigma' e^{bt}, \sigma'', \eta) \prod_{l=1}^{m} \eta_l^{2\nu_l+1} d\sigma d\eta.$$

Здійснимо в інтегралах по σ заміну $\xi' = \sigma' e^{bt}$, $\xi'' = \sigma''$, тоді $d\sigma = e^{-kbt} d\xi$, тому маємо розв'язок задачі (6.1) – (6.3):

$$u(t,x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} W_1(t, x' - \xi' e^{-bt}, x'' - \xi'') T^\eta_y [W_2(t,y)] \varphi(\xi,\eta) \prod_{l=1}^{m} \eta_l^{2\nu_l+1} d\xi d\eta \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}_+} G(t,x,y;0,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta) \prod_{l=1}^{m} \eta_l^{2\nu_l+1} d\xi d\eta, t > 0, (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}_+, \qquad (6.21)$$

де

$$G(t,x,y;0,\xi,\eta) \equiv G_1(t,x',\xi') G_2(t,x'',\xi'') G_3(t,y,\eta), \qquad (6.22)$$

$$G_1(t,x',\xi') \equiv \frac{\sqrt{b^k}}{(a\sqrt{2\pi})^k (\sqrt{1-e^{-2bt}})^k} \exp\Big\{ -\frac{b|x' - \xi' e^{-bt}|^2}{2a^2(1-e^{-2bt})}\Big\}, t > 0, \{x', \xi'\} \subset \mathbb{R}^k, \qquad (6.23)$$

$$G_2(t,x'',\xi'') \equiv \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^{n-k}} \exp\Big\{ -\frac{|x' - \xi'|^2}{4a^2 t}\Big\}, t > 0, \{x'', \xi''\} \subset \mathbb{R}^{n-k}, \qquad (6.24)$$

$$G_3(t,y,\eta)\equiv\frac{1}{2^{2|\nu|+m}(pt)^{|\nu|+m}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma(\nu_l+1)}T_y^{\eta}\Big[\exp\Big\{-\frac{|y|^2}{4pt}\Big\}\Big],t>0,\{y,\eta\}\subset\mathbb{R}_+^m. \tag{6.25}$$

Обчисливши, як у [27], оператор узагальненого зсуву

$$T_y^{\eta}\Big[\exp\Big\{-\frac{|y|^2}{4pt}\Big\}\Big]=\prod_{l=1}^{m}T_{y_l}^{\eta_l}\Big[\exp\Big\{-\frac{y_l^2}{4pt}\Big\}\Big]=\prod_{l=1}^{m}\exp\Big\{-\frac{y_l^2+\eta_l^2}{4pt}\Big\}j_{\nu_l}\Big(-i\frac{\eta_l y_l}{2pt}\Big)=$$

$$=\exp\Big\{-\frac{|y|^2+|\eta|^2}{4pt}\Big\}\prod_{l=1}^{m}j_{\nu_l}\Big(-i\frac{\eta_l y_l}{2pt}\Big),$$

одержимо інше зображення для G_3:

$$G_3(t,y,\eta)=\frac{1}{2^{2|\nu|+m}(pt)^{|\nu|+m}\prod\limits_{l=1}^{m}\Gamma(\nu_l+1)}\exp\Big\{-\frac{|y|^2+|\eta|^2}{4pt}\Big\}\prod_{l=1}^{m}j_{\nu_l}\Big(-i\frac{\eta_l y_l}{2pt}\Big).$$

Припускаючи, що початкова функція φ – неперервна і обмежена на $\mathbb{R}_+^{n+m}$, можна переконатися, що (6.21) справді є розв'язком задачі Коші (6.1) – (6.3), тобто що G є фундаментальним розв'язком цієї задачі. Це також випливає з того, що G_1, G_2, G_3 є фундаментальним розв'язком задач Коші відповідно для рівнянь

$$\partial_t u(t,x')=a^2\sum_{j=1}^{k}\partial_{x_j}^2u(t,x')+b\sum_{j=1}^{k}\partial_{x_j}(x_ju(t,x')),t>0,x'\in\mathbb{R}^k,$$

$$\partial_t u(t,x'')=a^2\sum_{j=k+1}^{n}\partial_{x_j}^2u(t,x''),t>0,x''\in\mathbb{R}^{n-k},$$

$$\partial_t u(t,y)=p\sum_{j=1}^{m}B_{y_j}u(t,y),t>0,y\in\mathbb{R}_+^m.$$

Із зображень (6.22) – (6.25) випливають такі оцінки похідних фундаментального розв'язку G:

$$|\partial_x^sG(t,x,y;0,\xi,\eta)|\le C_s(1-e^{-2bt})^{-\frac{k+|s'|}{2}}t^{-\frac{n-k+|s''|}{2}-|\nu|-m}\times$$

$$\times\exp\Big\{-c_1\frac{|x'-\xi'e^{-bt}|^2}{1-e^{-2bt}}-c_2\frac{|x''-\xi''|^2}{t}-c_3\frac{|y-\eta|^2}{t}\Big\}T_y^{\eta}\Big[\exp\Big\{-\Big(\frac14-c_3\Big)\frac{y^2}{pt}\Big\}\Big],$$

де $s=(s',s'')$, $s'=(s_1,\dots,s_k)$, $s''=(s_{k+1},\dots,s_n)$, $|s'|=s_1+\dots+s_k$, $|s''|=s_{k+1}+\dots+s_n$, C_s,c_1,c_2,c_3 – додатні сталі, $c_3<1/4$.

Безпосередньо обчислюючи інтеграли за допомогою (6.22) – (6.25), одержуємо властивість

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+m}} G(t,x,y;0,\xi,\eta)\prod_{l=1}^{m}\eta_l^{2\nu_l+1}d\xi d\eta = e^{kbt}.$$

Ці результати подані у [59].

Викладені результати у [57, 58] поширюються на деякі класи ультрапараболічних рівнянь подібної до (6.1) структури, що додатково містять похідні першого порядку по групі змінних $z = (z_1, z_2, \dots, z_l) \in \mathbb{R}^l$ з необмеженими на нескінченності коефіцієнтами x_j, $j = 1, \dots, l$. А саме, для функції $u = u(t,x,y,z)$ розглядається рівняння

$$\partial_t u = \sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}^2 u + \sum_{j=1}^{k}\partial_{x_j}(x_j u) + \sum_{j=1}^{l} x_j\partial_{z_j}u + \sum_{j=1}^{m} B_{y_j}u,$$

$$t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}_+^m,\ z \in \mathbb{R}^l.$$

Аналогічно методом перетворення Фур'є-Бесселя та методом характеристик шукається фундаментальний розв'язок задачі Коші в явному вигляді та встановлюються оцінки його похідних.

6.2 Розв'язування задач математичної фізики методом гібридних інтегральних перетворень типу Бесселя, Ейлера

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку з широким використанням композитних матеріалів, існує нагальна потреба у вивченні фізико-технічних характеристик таких матеріалів, що знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично призводить до задачі розв'язування сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами. Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоримтічного характеру задач математичної фізики є метод гібридних інтегральних перетворень [32, 35, 63].

6.2.1 Моделювання динамічних процесів методом гібридних інтегральних перетворень Бесселя-Ейлера на полярній осі

Розглянемо задачу побудови обмеженого в області

$$D_1^+ = \{(t, r) : t > 0, r \in I_1^+\},\ I_1^+ = (R_0; R_1) \cup (R_1; \infty),\ R_0 > 0,$$

розв'язку системи двох рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу [36]

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[u_1] = f_1(t, r),\ r \in (R_0; R_1),$$
$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 B^*_{\alpha_2}[u_2] = f_2(t, r),\ r \in (R_1; \infty), \tag{6.26}$$

за початковими умовами

$$u_j(t, r)|_{t=0} = g_j(r),\ \left.\frac{\partial u_j}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_j(r),\ r \in (R_{j-1}; R_j),\ j = 1, 2, R_2 = \infty, \tag{6.27}$$

умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^1\right) u_1 - \left(\alpha_{j2}^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^1\right) u_2\right]\right|_{r=R_1} = 0,\ j = 1, 2, \tag{6.28}$$

та крайовими умовами

$$\left.\left(-h_1 \frac{\partial}{\partial r} + h_2\right) u_1\right|_{r=R_0} = 0,\ \lim_{r\to\infty}[r^\gamma u_2] = 0. \tag{6.29}$$

Усі параметри та оператори, які беруть участь у постановці крайової задачі (6.26)-(6.29), описані у відповідних працях [32, 35, 63].

Розв'язок задачі будуємо методом гібридного інтегрального перетворення Бесселя-Ейлера за просторовою змінною, побудованого на полярній осі з однією точкою спряження у праці [63].

Пряме інтегральне перетворення Бесселя-Ейлера на полярній осі з однією точкою спряження записується у вигляді операторної матриці-рядка. Вихідна система та початкові умови записуються в матричній формі, і ми застосовуємо операторну матрицю-рядок до задачі (6.26)-(6.29) за правилом множення матриць.

В результаті отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку, розв'язок якої будується стандартним чином.

Обернене перетворення Бесселя-Ейлера записується у вигляді операторної матриці-стовпця, і ми застосовуємо його до побудованого розв'язку задачі

Коші. Після здійснення певних перетворень ми отримуємо єдиний розв'язок вихідної задачі:

$$u_j(t,r) = \int\limits_0^t \int\limits_{R_0}^{R_1} H_{\nu,(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho)+\varphi_1(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}d\rho d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t \int\limits_{R_1}^{\infty} H_{\nu,(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+\varphi_2(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}d\rho d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{R_0}^{R_1} H_{\nu,(\alpha);j1}(t,r,\rho)g_1(\rho)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}d\rho+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{R_1}^{\infty} H_{\nu,(\alpha);j2}(t,r,\rho)g_2(\rho)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}d\rho,\ j=1,2. \quad (6.30)$$

Функції вливу $H_{\nu,(\alpha);jk}(t,r,\rho)$, $j,k=1,2$, які беруть участь у формулі (6.30), визначені в [36].

Побудований розв'язок (6.30) має алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати його як у теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

6.2.2 Моделювання динамічних процесів методом гібридних інтегральних перетворень Бесселя-Ейлера-Бесселя на полярній осі

Розглянемо задачу побудови обмеженого в області

$$D_2^+ = \{(t,r): t>0, r\in I_2^+\},\ I_2^+ = (R_0;R_1)\cup(R_1;R_2)\cup(R_2;\infty),\ R_0>0,$$

розв'язку системи трьох рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу [8]

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\nu_1,\alpha_1}[u_1] = f_1(t,r),\ r\in(R_0;R_1),\\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\gamma_2^2 u_2 - a_2^2 B_{\alpha_3}^*[u_2] = f_2(t,r),\ r\in(R_1;R_2), \quad (6.31)\\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}+\gamma_3^2 u_3 - a_3^2 B_{\nu_2,\alpha_2}[u_3] = f_3(t,r),\ r\in(R_2;\infty),\end{gathered}$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0} = g_j(r),\ \left.\frac{\partial u_j}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_j(r),\ r \in (R_{j-1}; R_j),\ j = \overline{1,3}, R_3 = \infty, \quad (6.32)$$

умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}\right]\right|_{r=R_k} = 0,\ j,k = 1,2, \quad (6.33)$$

та крайовими умовами

$$\left.\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right) u_1\right|_{r=R_0} = 0,\ \lim_{r\to\infty} \frac{\partial^k u_3}{\partial r^k} = 0,\ k = 0,1. \quad (6.34)$$

Усі параметри та оператори, які беруть участь у постановці крайової задачі (6.31)-(6.34), описані у відповідних працях [32, 35, 63].

Розв'язок задачі будуємо методом гібридного інтегрального перетворення Бесселя-Ейлера-Бесселя за просторовою змінною, побудованого на полярній осі з двома точками спряження у праці [63].

Пряме інтегральне перетворення Бесселя-Ейлера-Бесселя на полярній осі з двома точками спряження записується у вигляді операторної матриці-рядка. Вихідна система та початкові умови записуються в матричній формі, і ми застосовуємо операторну матрицю-рядок до задачі (6.31)-(6.34) за правилом множення матриць.

В результаті отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку, розв'язок якої будується стандартним чином.

Обернене перетворення Бесселя-Ейлера-Бесселя записується у вигляді операторної матриці-стовпця, і ми застосовуємо його до побудованого розв'язку задачі Коші. Після здійснення певних перетворень ми отримуємо єдиний розв'язок вихідної задачі:

$$u_j(t,r) = \int_0^t \int_{R_0}^{R_1} H_{(\nu,\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho) + \varphi_1(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} d\rho d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} H_{(\nu,\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho) + \varphi_2(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_2 r^{2\alpha_3-1} d\rho d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_{R_2}^{\infty} H_{(\nu,\alpha);j3}(t-\tau,r,\rho)[f_3(\tau,\rho) + \varphi_3(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_3 r^{2\alpha_2+1} d\rho d\tau +$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{R_0}^{R_1} H_{(\nu,\alpha);j1}(t,r,\rho)g_1(\rho)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}d\rho+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{R_1}^{R_2} H_{(\nu,\alpha);j2}(t,r,\rho)g_2(\rho)\sigma_2 r^{2\alpha_3-1}d\rho+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{R_2}^{\infty} H_{(\nu,\alpha);j3}(t,r,\rho)g_3(\rho)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}d\rho,\ j=\overline{1,3}. \tag{6.35}$$

Функції впливу $H_{(\nu,\alpha);jk}(t,r,\rho)$, $j,k=\overline{1,3}$, які беруть участь у формулі (6.35), визначені в [8].

Побудований розв'язок має алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати його як у теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

6.2.3 Моделювання динамічних процесів методом гібридних інтегральних перетворень Бесселя-Ейлера на сегменті

Розглянемо задачу побудови обмеженого в області

$$D_1=\{(t,r):t>0,r\in I_1\},\ I_1=(0;R_1)\cup(R_1;R_2),\ R_2<\infty,$$

розв'язку системи двох рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу [9]

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\gamma_1^2 u_1-a_1^2 B^*_{\alpha_1}[u_1]=f_1(t,r),\ r\in(0;R_1),$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\gamma_2^2 u_2-a_2^2 B_{\nu,\alpha_2}[u_2]=f_2(t,r),\ r\in(R_1;R_2), \tag{6.36}$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0}=g_j(r),\ \left.\frac{\partial u_j}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_j(r),\ r\in(R_{j-1};R_j),\ j=1,2,R_0=0, \tag{6.37}$$

умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^1\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^1\right)u_1-\left(\alpha_{j2}^1\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^1\right)u_2\right]\right|_{r=R_1}=0,\ j=1,2, \tag{6.38}$$

та крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}[r^\gamma u_1]=0,\ \left.\left(\alpha_{22}^2\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^2\right)u_2\right|_{r=R_2}=0,\ . \tag{6.39}$$

Усі параметри та оператори, які беруть участь у постановці крайової задачі (6.36)-(6.39), описані у відповідних працях [32, 35, 63].

Розв'язок задачі будуємо методом гібридного інтегрального перетворення Бесселя-Ейлера за просторовою змінною, побудованого на сегменті з однією точкою спряження у праці [63].

Пряме інтегральне перетворення Бесселя-Ейлера на сегменті з однією точкою спряження записується у вигляді операторної матриці-рядка. Вихідна система та початкові умови записуються в матричній формі, і ми застосовуємо операторну матрицю-рядок до задачі (6.36)-(6.39) за правилом множення матриць.

В результаті отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку, розв'язок якої будується стандартним чином.

Обернене перетворення Бесселя-Ейлера записується у вигляді операторної матриці-стовпця, і ми застосовуємо його до побудованого розв'язку задачі Коші. Після здійснення певних перетворень ми отримуємо єдиний розв'язок вихідної задачі:

$$u_j(t,r)=\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1}H_{\nu,(\alpha);j1}(t-\tau,r,\rho)[f_1(\tau,\rho)+\varphi_1(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}d\rho d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2}H_{\nu,(\alpha);j2}(t-\tau,r,\rho)[f_2(\tau,\rho)+\varphi_2(\rho)\delta_+(\tau)]\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}d\rho d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{R_1}H_{\nu,(\alpha);j1}(t,r,\rho)g_1(\rho)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}d\rho+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{R_1}^{R_2}H_{\nu,(\alpha);j2}(t,r,\rho)g_2(\rho)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}d\rho,\ j=1,2. \tag{6.40}$$

Функції впливу $H_{\nu,(\alpha);jk}(t,r,\rho)$, $j,k=1,2$, які беруть участь у формулі (6.40), визначені в [9].

Побудований розв'язок (6.40) має алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати його як у теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

6.3 Багатоточкова стохастична задача

Багатоточкові за часом задачі для детермінованих рівнянь вивчались багатьма дослідниками (*див.* огляд в [18]). Однак такі задачі для стохастичних рівнянь є мало вивченими.

На ймовірнісному базисі $\Big(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, P\Big)$ розглянемо стохастичну задачу

$$du(t,x,\omega) = \Big[\sum_{|k|\leq 2b} a_k \partial_x^k u(t,x,\omega)\Big]dt + \Big[\sum_{|k|\leq b} b_k \partial_x^k u(t,x,\omega)\Big] d^*\varpi(t;\omega), \quad (6.41)$$

$$x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0;T],\ \omega \in \Omega,\ d^*\varpi(t;\omega) := d(-|\varpi(t,\omega)|)$$

з початковими умовами

$$\mu u(t,x,\omega)_{|t=0} - \mu_1 u(t,x,\omega)_{|t=1} - \ldots - \mu_m u(t,x,\omega)_{|t=m} = \varphi(x); \qquad (6.42)$$

$$u(t,x,\omega)_{|t=0} = 1, \quad u(t,x,\omega)_{|t=j} = \varphi_j(x;\omega),\ j \in \mathbb{N}_m. \qquad (6.43)$$

Тут $\sum\limits_{|k|\leq 2b} a_k \partial_x^k$, $\sum\limits_{|k|\leq b} b_k \partial_x^k$ – диференціальні многочлени, $\varpi(t;\omega)$ – стандартний скалярний вінерів процес, $0 < t_1 < \ldots < t_m = T$ – фіксовані моменти часу, $\varphi(\cdot)$ з ймовірністю 1 допускає перетворення Фур'є.

Означення 6.1 *М'ягким розв'язком задачі* (6.41)–(6.43) *назвемо випадкову функцію $u(t,x,\omega)$, узгоджену з потоком σ-алгебр $\{F_t\}$ яка, при кожному $t \in (0;T]$ з ймовірністю 1 задовольняє рівняння*

$$u(t,x,\omega) = \mu^{-1}(\varphi(x) + \mu_1 u_{|t=1} + \ldots + \mu_m u_{|t=m}) +$$

$$+ \int\limits_0^t \sum_{|k|\leq 2b} a_k \partial_x^k u(\tau,x,\omega)d\tau + \int\limits_0^t \sum_{|k|\leq b} b_k \partial_x^k u(\tau,x,\omega) d^*\varpi(\tau)$$

за умови, що існує стохастичний інтеграл Вінера-Іто, $\varpi(\tau) \equiv \varpi(\tau;\omega)$.

Основний результат такий.

Теорема 6.1 *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $\mathrm{Re} \sum\limits_{|k|\leq 2b} a_k (i\xi)^k + \frac{1}{2}(\mathrm{Im} \sum\limits_{|k|_+\leq b} b_k (i\xi)^k)^2 \leq -\delta_1 \|\xi\|^{2b} + \delta_2, \quad \delta_j > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n;$

2) при кожному $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\omega \in \Omega$ виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^m \mu_j E\{|Q(t_j,\xi,\omega)|\} < \mu < +\infty,$$

де $Q(t_j,\xi,\omega)$ – нормальний фундаментальний розв'язок рівняння (6.41), *$E\{\cdot\}$ – математичне сподівання. Тоді з ймовірністю 1 існує функція Гріна $G(t;t_1,\ldots,t_m,x,\omega)$ і розв'язок задачі* (6.41)–(6.43) *зображується формулою $u(t,x,\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t;t_1,\ldots,t_m,x-\xi,\omega)\varphi(\xi;\omega)d\xi$.*

Висновки до розділу

Для параболічного рівняння загальної структури з необмеженими коефіцієнтами та операторами Бесселя, що діють за частиною компонент просторової змінної, побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші та досліджено його основні властивості.

За допомогою гібридних інтегральних перетворень типу Ейлера, Бесселя розроблено методику розв'язування сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами.

Здійснено постановку і розв'язано стохастичну m-точкову за часом задачу Коші для параболічного рівняння вищого порядку із збуреннями типу "білого шуму"з від'ємними значеннями.

Результати п. 6.1 одержані Л.М. Мельничук [59], п. 6.2 – О.М. Ленюком [8, 9, 36], С.Г. Блажевським [8, 9], а п. 6.3 – Г.М. Перун [64, 114].

Розділ 7

МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ В ЗАКЛАДАХ ОСВІТИ

Розділ присвячений методиці навчання математики та інформатики в освітніх закладах України. В ньому розглянуті питання математичного моделювання із застосуванням сучасних інноваційних комп'ютерних технологій, а також, питання можливостей використання нестандартних підходів і графічного калькулятора вільного доступу, для побудови графіків функцій, які використовуються при розв'язуванні ірраціональних рівнянь з параметрами та ітераціями. Крім цього, досліджено ефективність методу візуалізації шляхом використання платформи Genially для створення інтерактивного анімованого контенту. Розглянуто методичні особливості дистанційного навчання при вивченні середовища програмування Скретч та доцільність використання мобільних застосунків для вивчення програмування в шкільному освітньому процесі.

7.1 Математичне моделювання в контексті сучасних інноваційних комп'ютерних технологій

Розглядається математична модель задачі "залізничне місце точок" та її графічне розв'язання за допомогою відкритого програмного середовища Lazarus для розробки програми побудови графіка шуканої лінії за знайденою математичною моделлю мовою Object Pascal. Зазначено, що наведене розв'язання задачі-моделі розширить кругозір і збагатить учнів ЗНЗ та студентів ЗВО математичними ідеями щодо міждисциплінарних зв'язків математики й інформатики, допоможе їм при поглибленому вивченні зазначених предметів і підготовці до олімпіад і турнірів з математики.

Постановка проблеми. У сучасній науці відбувається чітке усвідомлення модельного характеру знань про оточуюче середовище, тобто нове знання певної галузі науки пов'язане з дослідженням не власне реальних процесів довкілля, а їхніх моделей, насамперед, математичних. В результаті цього, в межах освітньої парадигми виникає потреба використання методології та елементів математичного моделювання із застосуванням сучасних інноваційних комп'ютерних технологій (ІКТ) в різних галузях науки й природознавства. Крім того, на турнірах з математики часто пропонують розв'язувати задачі-моделі, які в реальному житті можуть і не існувати, але створення їх математичних моделей і дослідження останніх вимагає певної математичної підготовки і належного володіння сучасними ІКТ.

Аналіз діючих навчальних програм з математичних дисциплін як ЗНЗ, так і ЗВО, методичної літератури дає підстави зробити висновок про те, що проблема послідовного і систематичного формування в суб'єктів навчання умінь математичного моделювання з використанням сучасних ІКТ в процесі розв'язування задач довкілля є недостатньо розробленою. Необхідність формування в суб'єктів навчання умінь математичного моделювання в процесі розв'язування реальних задач із застосуванням сучасних ІКТ, з одного боку, і недостатній рівень висвітлення цієї проблеми в методичній літературі – з іншого, визначають актуальність пропонованого дослідження.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Уміння математичного моделювання формується в суб'єктів навчання у процесі розв'язування задач з усіх предметів природничо-математичного циклу. Модельний підхід до розв'язування задач довкілля полягає в тому, що їх умови розглядаються як вербальний опис певних процесів. За результатами аналізу цих умов визначаються особливості цих процесів, їх параметри, накладаються певні обмеження на параметри, а потім обирається адекватний математичний апарат і створюються їх математичні моделі. Таким задачам присвячена низка як вітчизняних, так і закордонних публікацій. Зокрема, В. Волошена в [11] розглядає цикл фізичних задач, основною метою яких є вивчення учнями відмінних особливостей (властивостей) моделей, формування в них окремих компонентів (складових) загальнонавчального уміння математичного моделювання.

В.А. Кушнір у [34] описав загальний підхід щодо створення й розв'язування математичної моделі задачі конструювання певної функції із заданими властивостями з використанням ІКТ. О.А. Самарский, О.П. Михайлов у [78] наводять методи і приклади побудови та аналіз математичних моделей для різних задач механіки, фізики, біології, економіки, соціології. Метою статті є дослідження особливостей розв'язування задачі-моделі за допомогою математичного моделювання з використанням сучасних інноваційних комп'ютерних технологій. Виклад основного матеріалу дослідження. За допомогою модельних експериментів можна вивчати такі процеси, для яких реальні в принципі неможливі. Отримана при цьому математична модель є формальною схемою реального процесу, а аналіз результатів за допомогою сучасних інноваційних комп'ютерних технологій встановлює вплив введених параметрів на досліджуваний процес тощо.

Проілюстровано сказане на розв'язуванні задачі № 20 (Залізничне місце точок), запропонованої на XVII турнірі юних математиків імені Я.Й. Ядренка у 2014 році.

Задача. Із залізничної станції – точки S – виходять дві колії-промені, вздовж яких зі сталими швидкостями рухаються два поїзди-відрізки; промені не лежать на одній прямій. По одній з колій перший поїзд рухається у напрямку до станції S, а по іншій – другий поїзд віддаляється від цієї станції. Розглядатимемо рух поїздів-відрізків лише впродовж такого проміжку часу, протягом якого вони не виїжджають за межі колій-променів. У кожен фіксований момент часу розглядатимемо опуклі чотирикутники, вершинами яких є кінці поїздів-відрізків. З'ясуйте, за якої необхідної та достатньої умови всі точки перетину діагоналей таких чотирикутників лежатимуть на деякій параболі.

Розв'язання цієї задачі подано в [22].

7.2 Методичні особливості розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами

Розглянемо питання можливостей використання нестандартних підходів і графічного калькулятора вільного доступу від desmos.com для побудови графіків функцій, які використовуються при розв'язуванні ірраціональних рівнянь з параметрами з ітераціями. Зазначемо, що використання запропонованого підходу розв'язування наведених задач розширить кругозір і збагатить учнів ЗНЗ математичними ідеями, допоможе їм при поглибленому вивченні математики та підготовці до олімпіад і турнірів з математики.

Постановка проблеми. Успішна самореалізація особистості за умов сьогодення певною мірою забезпечується зокрема й базовими знаннями з математики. Зважаючи на те, що переважна більшість майбутніх професій тісно пов'язані з останньою, постає потреба у повнішому опануванні поняттями, теоріями з використанням інноваційних технологій у навчанні та організації дослідницької й проектної діяльності у галузі математики, які сприяють формуванню високого рівня практичних компетентностей суб'єктів навчання, орієнтованих на розвиток особистості останніх. Крім того, результати олімпіад з математики різного рівня, турнірів юних математиків тощо дають підстави констатувати про недостатню спроможність учнів загальноосвітніх навчальних закладів належно використовувати нестандартні підходи при розв'язуванні, наприклад, ірраціональних рівнянь з параметрами. Потреба у застосуванні нестандартних прийомів при розв'язуванні ірраціональних рівнянь, особливо з параметрами, із використанням графічної ілюстрації збагачує учнів ЗНЗ математичними ідеями при поглибленому вивченні математики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Щоб успішно навчатися розв'язувати ірраціональні рівняння з параметрами, необхідно володіти загальними вміннями та навичками бачити математичні об'єкти, порівнювати їх з іншими, мати відповідний рівень уяви, бути кмітливим. Такі вміння і якості розвиваються та доповнюються творчими підходами вчителя й учня, а допомагає цьому використання інноваційні технології навчання.

Зауважимо, що пошуки ефективних шляхів підвищення рівня процесу навчання учнів нетрадиційним підходам розв'язування задач і підготовки їх до олімпіад з математики різного рівня, турнірів тощо привертають увагу педагогів, учених і практиків.

А.І. Козко, В.Г. Чирський у [31] на розв'язуванні ірраціональних рівнянь з параметрами, а Д.Т. Белешко у [7] на розв'язуванні ірраціональних рівнянь демонструють нестандартні підходи щодо їх розв'язування, проте не використовують можливостей застосування сучасних інноваційних технологій.

Метою є дослідження особливостей розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами.

Виклад основного матеріалу дослідження. На зовнішньому незалежному оцінюванні, олімпіадах з математики різного рівня і турнірах трапляються ірраціональні рівняння з параметрами, які потрібно виконати за обмежений час, при цьому їх учасникам доцільніше знайти найкоротший шлях розв'язання, застосувавши нетрадиційний, оригінальний метод тощо. Такі прийоми пов'язані з матеріалом, що вивчають у ЗНЗ і вимагають вдумливого підходу щодо пошуку їх оригінальних розв'язань.

У різних збірниках задач з математики наявні ірраціональні рівняння з параметрами, розв'язування яких стандартними способами є громіздким або неможливим, а застосування нестандартних підходів та властивостей функцій і сучасних інноваційних методів, сприяє простішому та раціональному їх розв'язанню.

Задача 1. Знайти усі значення параметра a, при яких рівняння

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$$

має розв'язки.

Задача 2. Знайти усі значення параметра а, при яких рівняння

$$\sqrt{5a+\sqrt{5a-\frac{x^2}{4}-4}}+\frac{x^2}{4}+x=0$$

має розв'язки.

Розв'язання цих задач наведені в [23].

Сьогодні важливо оволодіти різними можливостями правильного оформлення алгоритму розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами з ітераціями, який би не містив громіздких викладок, але за допомогою останніх можна було б продемонструвати яскраві ефективні, а іноді й несподівані застосування теоретичного матеріалу, у нашому випадку стосовно розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами.

Вважаємо, що наведений теоретичний матеріал і приклади розв'язаних задач збагатить математичними ідеями, допоможуть при поглибленому вивченні математики, підготовці до олімпіад і конкурсів з математики різного рівня та вироблять потребу у користуванні сучасними графічними калькуляторами, які є у вільному електронному доступі, при розв'язуванні задач.

7.3 Використання програмних засобів при вивченні інформатики у закладах освіти

7.3.1 Реалізація методу візуалізації шляхом використання платформи Genially для створення інтерактивного анімованого контенту

У публікації [60] проводиться аналіз вивчення теми «Комп'ютерні презентації» здобувачами середньої освіти та обговорюється її важливість при підготовці вчителів інформатики у закладах вищої освіти. Пропонується вивчення учнями та студентами платформи Genially для створення анімованих презентацій та іншого інтерактивного контенту.

Однією з ефективних технологій активізації навчання у закладі освіти будь-якого рівня є метод візуалізації навчального матеріалу. Технології візуалізації навчального матеріалу ґрунтуються на тому, що візуальне сприйняття є одним з визначальних для людини. З іншого боку, сучасні освітні концепції спрямовані на збільшення інформаційного навантаження на учня чи студента, що вимагає якісної підготовки педагога.

Одним з найпоширеніших зараз методів візуалізації є використання в освітній діяльності презентацій та інших дидактичних матеріалів. Чим молодші діти, тим більш яскравою та інтерактивною має бути наочність: зображення, відео, інфографіка, анімації, діаграми тощо. Використання презентацій у закладах освіти розглядається в таких аспектах. По-перше, це вивчення учнями чи студентами сервісів для створення презентацій з метою демонстрування ними результатів своєї дослідницької чи проєктної діяльності. По-друге, це використання презентацій вчителями чи викладачами для подання навчального матеріалу. Особливе місце тут займає навчання майбутніх вчителів інформатики, адже вони в своїй діяльності мають реалізовувати обидва аспекти: і навчати учнів створювати презентації, і самим таким способом презентувати матеріал уроку.

Проаналізуємо зміст навчального матеріалу зі шкільної інформатики стосовно питання комп'ютерних презентацій. Починаючи з 2018 року, запроваджена реформа системи середньої освіти Міністерства освіти і науки України – нова українська школа. Згідно з цією реформою окремо виділена інформатична освітня галузь, однією з цілей якої є розвиток здатності учня використовувати цифрові інструменти та технології для розв'язання проблем, творчого самовираження, забезпечення власного і суспільного добробуту, критичного мислення. Для реалізації інформатичної галузі затверджено програми з інформатики, які побудовані за концентрично-лінійним принципом, тобто ті знання, які учні отримали у молодших класах, поглиблюються та розширюються у старших класах, поступово збільшується і складність навчальних тем. Це стосується і теми «Комп'ютерні презентації».

Згідно з рекомендованими Міністерством освіти і науки України навчальними програмами [95, 91, 92] для початкової та базової освіти, тема «Комп'ютерні презентації» вивчається переважно у 3-6 класах. Так, зміст матеріалу по класах в основному такий:

3 клас. Комп'ютерні презентації, редагування презентацій. Утворення нового слайду, текстового вікна. Доповнення презентації текстом, зображенням, схемою. Форматування презентації. Режим показу презентації.

4 клас. Форматування та редагування об'єктів презентації. Додавання анімаційних ефектів до об'єктів презентації. Використання таблиць і діаграм у презентації.

5-6 класи. Програмне забезпечення для створення й відтворення комп'ютерних презентацій. Етапи створення презентації та вимоги до її оформлення. Об'єкти презентації та засоби керування її демонстрацією. Типи слайдів. Налаштування показу презентацій. Ефекти анімації, рух об'єктів в презентаціях. Різновиди та сфери застосування анімації. Ефекти зміни слайдів. Планування представлення презентації та виступ перед аудиторією.

Що стосується редакторів презентацій, які діти вивчають у школі, то у майже всіх підручниках [94], рекомендованих Міністерством освіти і науки України, детально вивчається найбільш поширений редактор презентацій Microsoft PowerPoint. Лише у підручниках Н. Морзе паралельно вивчаються редактори презентацій Microsoft PowerPoint та LibreOffice Impress. У деяких підручниках (наприклад, О. Коршунової та Я. Глинського для 5 класу) вказано також інші сервіси, а саме Google Slides, Apple Keynote, OOO4Kids Impress, Prezi, Zoho Show, SlideRoscet тощо та описані деякі їх переваги. Зокрема, редактором Keynote можна користуватися на iPad та на iPhone, що важливо при дистанційному навчанні.

Таким чином, у школі вивчення середовищ створення презентацій відбувається у 3-6 класах, причому кожного року це один і той самий редактор.

Тільки у вузах при підготовці вчителів інформатики є можливість передбачити вивчення інших середовищ створення презентацій, сучасніших, з більшими можливостями. Одним з них є платформа для створення інтерактивних анімованих презентацій Genially [93].

Genially – сучасний багатозадачний онлайн-сервіс для легкого та швидкого створення будь-якого візуального та інтерактивного вмісту для індивідуального чи командного використання. Він був створений у 2015 році в Іспанії і з того часу ним користуються у багатьох країнах.

Опишемо переваги середовища Genially:

• не потрібно нічого завантажувати, щоб використовувати його, це онлайн-редактор;

• тут можна створити не лише інтерактивні презентації з анімацією та можливістю налаштування, але також й інтерактивні зображення, карти, звіти, інфографіку, вікторини, плакати, відео, стрічки часу, ігри та віртуальні посібники та інші категорії;

• для кожної категорії є сотні шаблонів та тисячі ресурсів (піктограми, шрифти, ілюстрації та фони) для налаштування вмісту, ці шаблони розроблені командою професійних дизайнерів;

• для початку розробки електронних освітніх ресурсів не потрібно мати навички програмування чи дизайну, все зрозуміло на інтуїтивному рівні;

• хоча мовами інтерфейсу є англійська, іспанська та французька, та у браузері Google Chrome можна легко налаштувати автоматичний переклад сервісу українською мовою;

• сервіс має безкоштовну та платну версії, проте і у безкоштовній версії цілком достатньо шаблонів та інструментів для створення робіт і час користування ними необмежений;

• Genially дозволяє організувати проєктну діяльність, що важливо для формування в учнів навичок спільної роботи.

Щоб почати використовувати Genially, треба: 1) увійти за посиланням https://genial.ly/ та зареєструватися; 2) вибрати категорію та шаблон; 3) редагувати, додаючи різні елементи, ресурси або ефекти на зображеннях; вибрати режим навігації між сторінками; 4) вибрати інтерактивність, тобто відео, карти Google, графіки, вміст в соціальних мережах тощо; 5) додати анімацію; 6) поділитися створеним через соціальні мережі, за посиланням, вставити її на веб-сторінку чи блог, надіслати електронною поштою або завантажити у форматі PDF, JPG або в HTML.

Враховуючи простоту роботи в середовищі Genially та чудові результати, можна рекомендувати включити його вивчення в програму з інформатики для учнів 5-6 класів після детального вивчення Microsoft PowerPoint. Для студентів вузів, які проходять навчання за спеціальністю «Середня освіта (інформатика)», слід вивчати і застосовувати цей сервіс в курсах, пов'язаних з інформаційними технологіями в освіті, зокрема у дисциплінах «Вступ до спеціальності», «IT та онлайн-сервіси в професійній діяльності вчителя», «Інформаційно-комунікаційні технології в освіті», «Інформаційні технології у підготовці дидактичних матеріалів», «Методика впровадження дослідницьких робіт з інформатики», «Технології викладання інформатики у закладах освіти» тощо.

7.3.2 Методичні особливості дистанційного навчання при вивченні середовища програмування Скретч

Скретч - це програмне середовище та інтерпретована динамічна візуальна мова програмування, в якій код створюється шляхом комбінування графічних блоків. Ця мова програмування розроблена на традиціях мови Logo та Squeak дослідницькою групою під керівництвом професора Мітчела Рєзніка при Массачусетському технологічному інституті (США), перша версія Скретчу представлена у 2007 році.

Скретч - один з найкращих засобів для навчання програмуванню дітей молодшого та середнього шкільного віку. Справді, блоками легко маніпулювати, залучаючи різноманітні графічні об'єкти, зображення, звуки та музику; код можна змінювати навіть під час виконання; у середовищі багато засобів, щоб створювати різноманітні ігри, анімаційні історії, тести, презентації тощо. Крім цього, середовище можна безкоштовно завантажити і вільно використовувати у школі чи позашкільних закладах; воно перекладене 70 мовами; проєкти у Scratch можна легко показати іншим користувачам у всьому світі, бо організована міжнародна інтернет-спільнота для всіх, хто програмує у цьому середовищі.

МОН України ще з 2013 року рекомендує [95, 91, 92] вивчення програмування у 3 - 7 класах здійснювати у середовищі Скретч, та і в шкільних підручниках описано саме це середовище програмування. Тому його обов'язково слід вивчати майбутнім вчителям інформатики під час навчання у вузі.

Зважаючи на це, наші студенти на третьому курсі опановують Скретч при вивченні дисципліни «Інтерпретована динамічна візуальна мова програмування». Методично очне навчання проводиться таким чином. На лекційних заняттях подається ілюстрований прикладами матеріал про інтерфейс, інструменти, вбудований графічний редактор, методи створення, руху та взаємодії спрайтів, методи керування спрайтами, методи створення анімацій, використання операторів циклу і розгалуження, використання змінних і масивів для створення проєктів тощо. На практичних заняттях розглядається методика розв'язування задач на відповідну тему, а на лабораторних заняттях студенти виконують індивідуальні проєкти, в яких застосовують вивчені прийоми і методи. Ці проєкти студенти презентують на наступному практичному занятті. Треба зауважити, що більшість завдань мають творчий характер, тобто студентам треба самим придумати свою казку, гру чи історію, вибрати дійові особи, їх костюми, придумати сценарії та діалоги, вибрати методи анімації. Чітко розписані лише засоби, які обов'язково слід використати, щоб закріпити матеріал певної теми. Лабораторні заняття проводяться у комп'ютерних класах, а на лекціях і практичних заняттях використовується демонстрація екрана викладача. На основі проведених мною занять з дисципліни «Інтерпретована динамічна візуальна мова програмування» видано навчальний посібник [62], у якому зібрано лекційний матеріал, є зразки виконання проєктів до кожної теми, завдання для індивідуальних проєктів та методичні рекомендації до їх створення.

Із вимушеним переходом до дистанційного навчання у зв'язку із пандемією Covid-19 виникла необхідність дещо змінити методику вивчення цієї дисципліни. Так, за наявності готових презентацій лекційні заняття стало проводити легше, оскільки ми працюємо у Google Meet, тому не потрібні додаткові технічні засоби для демонстрації екрана. Методичні матеріали можна відправляти студентам електронною поштою, надавати доступ у хмарі чи працювати в освітньому середовищі Moodle. Захист виконаних індивідуальних проєктів відбувається у Google Meet, тому кожен має змогу побачити і оцінити роботу одногрупників, а це дозволяє навчитися майбутнім вчителям оцінювати здобутки учнів. Крім цього, легко проводити опитування шляхом тестування. А ще студенти завжди мають можливість почерпнути нові ідеї, проглянувши і проаналізувавши готові проекти, викладені в інтернет-спільноті.

Разом з тим використання технологій дистанційного навчання має і ряд недоліків. Насамперед це стосується якості інтернет-зв'язку та наявності технічного оснащення. Адже в той час, коли інші дисципліни можна вивчати, маючи лише смартфон, то у середовищі Скретч можна працювати лише на комп'ютері чи ноутбуці. Іншими недоліками є відсутність безпосереднього спілкування зі студентами та шкода фізичному здоров'ю від занадто довгого сидіння перед монітором для всіх суб'єктів навчального процесу.

7.3.3 Мобільні застосунки для вивчення програмування в шкільному освітньому процесі

Останні роки змусили процес навчання набути значно іншого характеру. У зв'язку з пандемією та повномаштабною війною в Україні, ледь не всі навчальні заклади перейшли на змішану чи повністю дистанційну форму навчання. Таке рішення має ряд переваг. Набагато простіше і швидше навчатися прямо з дому. Тим не менше, для того, щоб забезпечити можливість отримувати знання на відстані, потрібно мати, як мінімум,смартфон та якісний інтернет зв'язок. У сучасності, доволі популярною та прибутковою є IT сфера. Стаціонарна форма навчання давала можливість людям, що не мають вдома персонального комп'ютера, навчатися програмуванню. На жаль, навіть зараз не кожен може дозволити собі якісний смартфон, не те що ПК. Тому розглянемо ряд мобільних застосунків, що дозволяють вивчати програмування дітям різного віку в своєму смартфоні.

ScratchJr – початкова мова програмування в мобільному застосунку,що є спрощеним варіантом стандартного Scratch. Тут є тільки шість категорій команд в кожному з яких від п'яти до семи скриптів, які можна застосувати до об'єктів. Головним героєм залишився рудий кіт. Програма дозволяє обирати інші об'єкти з меню, або створювати власні. Такі ж функції збереглися по відношенню і до сцени. Застосунок розрахований для опанування дітьми від шести років і є повністю безкоштовним. Мова подання інформації - українська.

Codeacademy Go – застосунок для початку вивчення веброзробки Data Science, Python, SQL, HTML і CSS, Java та ін. У додатку можна вивчати не тільки ці мови, але і проходити курси за різними напрямами. Будь-який курс можна пройти в будь-який момент, проходити попередні курси необов'язково. Застосунок є безкоштовним, але можлива підписка для доступу до всіх курсів. Інформація подається англійською мовою.

Dcoder, code compiler IDE – це застосунок-компілятор для програмістів. Середовище підтримує понад тридцять мов програмування. Міститьрозділ з завданнями, які допоможуть в вивченні програмування. Застосунок надає наступні можливості:

- синхронізації з GitHub і Bitbucket;
- підсвічування синтаксису;
- робота з проєктами з декількох файлів;
- налагодження коду.

У застосунку лаконічний і зрозумілий дизайн. Також є чат з іншими розробниками. Основний функціонал безкоштовний. Мова додатку -англійська. Datacamp – це програма, яка пропонує вивчення тільки трьох таких мов: SQL, Python та R. Не зважаючи на невеликий вибір, для сфери аналізу даних цього більш, ніж достатньо. Вивчати програмування можна користуючись як безкоштовною так і платною версією застосунку. Для кожної мови є декілька шляхів розвитку, котрі також розділені на теми. Навчання проходить у форматі теоретичної відео-частини та практики з написанням коду й запитаннями з варіантами відповідей. Мова використання – англійська.

Висновки до розділу

Формування вмінь математичного моделювання з використанням сучасних інноваційних комп'ютерних технологій при розв'язуванні реальних задач довкілля і задач-моделей сприяє міжпредметному узагальненню набутих суб'єктами навчання знань і вмінь, формуванню в них уявлень про універсальний характер математичних методів дослідження.

Важливим є оволодіння різними можливостями правильного оформлення алгоритму розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами з ітераціями, який би не містив громіздких викладок, але за допомогою останніх можна було б продемонструвати яскраві ефективні, а іноді й несподівані застосування теоретичного матеріалу, у нашому випадку стосовно розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами. Наведений тут теоретичний матеріал і приклади розв'язаних задач збагатить математичними ідеями, допоможуть при поглибленому вивченні математики, підготовці до олімпіад і конкурсів з математики різного рівня та вироблять потребу у користуванні сучасними графічними калькуляторами, які є у вільному електронному доступі, при розв'язуванні задач.

Genially – це універсальний конструктор для дистанційного навчання і створення інтерактивних дидактичних матеріалів. За його допомогою вчителі можуть створити цікаві та привабливі уроки для учнів, а учням буде цікаво створювати і презентувати свої проєкти.

За умови доброго методичного забезпечення і покращення технічних можливостей дистанційне викладання дисципліни «Інтерпретована динамічна візуальна мова програмування» може стати домінуючим методом навчання Скретчу для студентів.

За наявності наведених мобільних додатків практичне вивчення мов програмування, під час освітнього процесу, можливе не зважаючи на доступність персональних комп'ютерів. Єдиним вагомим мінусом є відсутність україномовного інтерфейсу, що може ускладнити навчання. Проте майже всі англомовні застосунки можна використовувати як вільне середовище для програмування, де завдання буде подавати вчитель. Крім того, в застосунках є цілий ряд переваг: широкий вибір мов програмування; орієнтація на різні вікові категорії; додаткові, вже готові, варіанти завдань. Отже, вони дозволяють вчителю якісно подавати навчальний матеріал.

Результати п.п. 7.1, 7.2 одержані В.М. Лучком з колективом авторів [20, 21, 22, 23, 24], п. 7.3.1 – Л.М. Мельничук спільно з Г.М. Перун [60], п. 7.3.2 – Л.М. Мельничук [61], п. 7.3.3 – Г.М. Перун [80].

ВИСНОВКИ

За звітний період виконавцями НДР:

- узагальнено класичне рівняння фрактальної дифузії, для якого:

  - з'ясовано, що його фундаментальний розв'язок задачі Коші є щільністю розподілу ймовірностей для сили локальної взаємодії рухомих об'єктів у відповідному гравітаційному полі Рісса;

  - встановлено коректну розв'язність задачі Коші в класі необмежених, розривних з інтегровною особливістю початкових функцій;

  - знайдено інтегральну форму класичного розв'язку цієї задачі та досліджено властивості його гладкості й поведінку на нескінченності;

  - на інтервалах стабільної інтенсивності коефіцієнта флуктуації рівняння встановлено аналог принципу максимуму;

  - наведено приклад задачі Коші з початковою функцією – ядром Рісса дробового інтегрування, та встановлено її природничий зміст;

- вперше встановлено загальну природу сійких симетричних випадкових процесів Леві в контексті задачі про локальний вплив рухомих об'єктів в гравітаційних полях Рісса;

- означено класи параболічних систем рівнянь із частинними похідними, що характеризують багатство класу Шиловим систем рівнянь зі змінними коефіцієнтами та класу $\{\vec{p}, \vec{h}\}$-параболічних систем. Обгрунтовано їх параболічну стійкість щодо зміни коефіцієнтів;

- установлено загальні оцінки фундаментального розв'язку задачі Коші та його похідних для систем з цих класів не використовуючи поняття роду системи;

- досліджено основні властивості функції Гріна для гіперболічних за Шиловим систем у просторах типу S, встановлено існування та єдиність у кожному такому просторі класичного розв'язку задачі Коші, розширено клас єдиності S_0' Гельфанда і Шилова для таких систем до просторів $S_0^{\beta'}$, $\beta > 1$, і доведено, що ці розширення є класами коректності. Одержані результати проілюстровано на прикладі рівняння коливання необмеженої струни;

- для параболічних рівнянь другого порядку з імпульсною умовою за часовою змінною та зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння за часовою та просторовими змінними в гельдерових просторах зі степеневою вагою, степінь якої залежить від порядку особливостей коефіцієнтів:

- знайдено умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші, та задачі Діріхле;

- встановлено коректну розв'язність задачі зі скісною похідною;

- встановлено існування, єдиність та оцінки розв'язків односторонньої крайової задачі;

- досліджено багатоточкові задачі Коші, Діріхле та задачу зі скісною похідною для параболічного рівняння, коефіцієнти якого вироджуються довільним чином за часовою змінною у фіксований момент часу та просторовими змінними на деякій множині точок, при цьому:

  - встановлено існування та оцінку розв'язку багатоточкової задачі Коші для параболічного рівняння, коефіцієнти якого мають довільні степеневі особливості за часовою і просторовими змінними;

  - встановлена коректна розв'язність першої крайової задачі для параболічного рівняння, коефіцієнти якого мають степеневі особливості довільного порядку за часовою та просторовими змінними;

  - знайдено умови існування та єдиності розв'язку задачі зі скісною похідною для виродженого параболічного рівняння зі степеневими особливостями в коефіцієнтах рівняння та крайової умови;

- для задачі оптимального керування системою, яка описується задачею зі скісною похідною та інтегральною умовою за часовою змінною, для виродженого параболічного рівняння другого порядку встановлено існування та знайдено оцінки її розв'язку, а також, сформульовано необхідні та достатні умови існування розв'язку цієї задачі та аналогічної задачі для 2b-параболічних рівнянь;

- узагальнено підхід до опису термоелектричного поля, який дозволив вперше отримати аналітичні розв'язки оберненої задачі термоелектрики у вигляді, зручному для керування вихровими термоелектричними струмами у зонально-неоднорідному середовищі;

- розроблено схему побудови утворюючої функції термоелектричного поля для двовимірного гіротропного середовища, яка спрощує знаходження розподілів температури, потенціалу і струму, необхідних для створення гіротропних термоелементів. Наведено приклади використання утворюючої функції для знаходження вихрових струмів у плоскому гіротропному середовищі;

- для параболічного рівняння загальної структури з необмеженими коефіцієнтами та операторами Бесселя, що діють за частиною компонент просторової змінної побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші та досліджено його основні властивості;

- за допомогою гібридних інтегральних перетворень типу Ейлера, Бесселя розроблено методику розв'язування сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами;

- здійснено коректну постановку і розв'язано стохастичну m-точкову за часом задачу Коші для параболічного рівняння вищого порядку із збуреннями типу "білого шуму"з від'ємними значеннями;

- розглянуто методичні аспекти навчання математики та інформатики в освітніх закладах, зокрема, досліджено:

  - питання математичного моделювання із застосуванням сучасних інноваційних комп'ютерних технологій;

  - питання можливостей використання нестандартних підходів і графічного калькулятора вільного доступу, для побудови графіків функцій, які використовуються при розв'язуванні ірраціональних рівнянь з параметрами та ітераціями;

  - ефективність методу візуалізації шляхом використання платформи Genially для створення інтерактивного анімованого контенту;

  - методичні особливості дистанційного навчання при вивченні середовища програмування Скретч та доцільність використання мобільних застосунків для вивчення програмування в шкільному освітньому процесі.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. *Агекян Т.А.* Теория вероятностей для астрономов и физиков. – М.: Наука, 1974.

2. *Анатычук Л.И.* О физических моделях термоэлементов // Термоэлектричество, 2003. №1. С. 5-18.

3. *Анатычук Л.И.* Термоэлектричество. Т 1. Физика термоэлектричества. Киев, Черновцы : Институт термоэлектричества, 1998. 375 с.

4. *Анатычук Л.И.* Термоэлектричество. Т 2. Термоэлектрические преобразователи энергии. Киев, Черновцы, 2003. 376 с.

5. *О.О. Бабич, С.Д. Івасишен, Г.С. Пасічник* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів // Наук. вісник Чернівецкого нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича. Сер. математика: Зб. наук. праць. – **1**, № 1–2. – Чернівці: Чернівецкий нац. ун-т, 2011. – С. 13–24.

6. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Науковий вісник Чернівецкого ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.288. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 5–11.

7. *Белешко Д.Т.* Розв'язуємо ірраціональні рівняння та нерівності: Навчальний посібник. Тернопіль : Навчальна книга. Богдан, 2012. 80 с.

8. *Блажевський С.Г., Ленюк О.М., Нікітіна О.М., Шинкарик М.І.* Моделювання динамічних процесів методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Ейлера-Бесселя на полярній осі // Прикладні питання математичного моделювання. Т.3, №2.1. - Херсон: ХНТУ, 2020. - С. 18-26.

9. *Блажевський С.Г., Ленюк О.М., Нікітіна О.М., Шинкарик М.І.* Моделювання динамічних процесів методом гібридного інтегрального пере-

творення типу Ейлера-Бесселя на сегменті // Прикладні питання математичного моделювання. Т.4, № 2.1. - Херсон: ХНТУ, 2021. - С. 25-31.

10. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики, 2-е изд. – М.: Наука, 1971. – 512 с.

11. *Волошена В.* Математичне моделювання в процесі розв'язування фізичних задач // Математика в рідній школі. – 2015, № 6. – С. 30-32.

12. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

13. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М. : Физматгиз, 1958. – 274 с.

14. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К. : Наук. думка, 1984. – 283 с.

15. *Горбачук М.Л., Дудников П.И.* О начальных данных задачи Коши для параболических уравнений, при которых решения бесконечно дифференцируемы // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 4. – С. 9–11.

16. *Горбачук М.Л., Пивторак Н.И.* О решениях эволюционных уравнений параболического типа с вырождением // Дифф. уравн. – 1985. – 21(8). – С. 1317–1324.

17. *Городецкий В.В.* Некоторые теоремы о стабилизации решений задачи Коши для параболических по Шилову систем в классах обобщенных функций // Укр. мат. журн. – 1988. – 40(1). – С. 43–48.

18. *Городецький В.В., Спіжавка Д.І.* Багатоточкова задача для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами // Доп. НАНУ. – 2009. №12. – С. 7-12.

19. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці : Рута, 1998. – 225 с.

20. *Житарюк І.В., Лучко В.М., Лучко В.С.* Міжпредметні зв'язки при розв'язуванні задач алгебри з використанням геометрії // Pedagogy and Psychology : http://doi.org/10.31174/SEND-PP2018-162VI66 – VI(66), Issue 162 - 2018. – P. 66-69. https://seanewdim.com/uploads/3/4/5/1/34511564/httpdoi.org10.31174send-pp2018-162vi66-14.pdf

21. *Житарюк І.В., Лучко В.М., Лучко В.С.* Методичні особливості розв'язування задач з математики підвищеної складності з використанням властивостей і графіків елементарних функцій // Pedagogy and Psychology : VI(74), Issue 180 - 2018. – P. 70-73. https://seanewdim.com/180i.html

22. *Житарюк І.В., Лучко В.М., Блажевський С.Г.* Математичне моделювання і задачі-моделі в контексті використання сучасних інноваційних комп'ютерних технологій . Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, VII (83), Issue: 203, 2019. С. 55-57 https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=31622 https://seanewdim.com/uploads/3/4/5/1/34511564/ped-psy-vii-203-83.pdf ICV 2019: 89.50 ISSN: 2308-5258, 2308-1996

23. *Житарюк І.В., Лучко В.М., Лучко В.С.* Методичні особливості розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами з використанням властивостей і графіків елементарних функцій. Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, VII (80), Issue: 198, 2019. С. 52-54. https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=31622 https://seanewdim.com/uploads/3/4/5/1/34511564/httpsdoi.org10.31174send-pp2019-198vii80-13.pdf ICV 2019: 89.50 ISSN: 2308-5258, 2308-1996

24. *Житарюк І.В., Лучко В.М., Лучко В.С.* Міжпредметні зв'язки математики та інформатики при розв'язуванні олімпіадних задач. Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28 - 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. Чернівці, 2021. С. 73. https://drive.google.com/file/d/1zBh4tgaRH82fZmygefKaF79RnLhqrd4X/view

25. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для некоторых типов параболических по Г. Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1959. – 23. – С. 925–932.

26. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983.

27. *Ивасишин Л.М.* Интегральное представление и множества начальных значений решений параболических уравнений с оператором Бесселя и

растущими коэффициентами . - Черновиц. ун-т. – Черновцы, 1992. – 62 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 26.10.92, № 1731 – Ук92.

28. *Івасишен С.Д.* Матрица Грина общих неоднородих граничних задач для параболических по И.Г. Петровскому систем. –К.: Препринт Ин-та математики АН УССР. – 1968.2. - 52 с.

29. *Ісарюк І. М., Пукальський І. Д.* Внутрішнє і стартове керування розв'язками крайової задачі для параболічних рівнянь з виродженнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля, т. 63, №2. 2020. С. 17-28.

30. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. – М.: Мир, 1965.

31. *Козко А.И., Чирский В.Г.* Задачи с параметрами и другие сложные задачи. М. : МЦНМО, 2007. 296 с.

32. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. Чернівці: Прут, 2004. 276 с.

33. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 287 с.

34. *Кушнір В.А.* Конструювання навчальних завдань з математики : математичні моделі, алгоритми, програми // Інформаційні технології в освіті. – 2014. Вип. 18. – С. 30-41.

35. *Ленюк М.П., Шинкарик М.І.* Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. Тернопіль: Економ. Думка, 2004. 368 с.

36. *Ленюк О.М., Нікітіна О.М., Шинкарик М.І.* Моделювання динамічних процесів методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Ейлера на полярній осі // вісник ХНТУ. Вип. №2(69). - Херсон: ХНТУ, 2019. - С. 140-144.

37. *Литовченко В.А.* Задача Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных систем с негладкими символами // Сиб. мат. журн. – 2008. – **49**, № 2. – С. 375–394. https://doi.org/10.1007/s11202-008-0030-z

38. *Литовченко В.А.* Задача Коши для параболических по Шилову уравнений // Сиб. мат. журн. – 2004. – 45(4). – С. 809–821.

39. *Литовченко В.А.* Задача Коши для $\{\overrightarrow{p}; \overrightarrow{h}\}$-параболических уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от времени // Мат. заметки. – 2005. – 77(3). – С. 395–411.

40. *Литовченко В.А.* Псевдодифференциальное уравнение локального влияния движущихся обьектов // Дифф. уравн. – 2022, 58(1). – С.45-51. DOI: 10.31857/S037406412201006X

41. *Літовченко В.А.* Принцип максимуму для рівняння локальних флуктуацій гравітаційних полів Рісса суто дробового порядку // Бук. мат. журн. 9 (2) (Груд 2021). DOI: https://doi.org/10.31861/bmj2021.02.06

42. *Літовченко В.А.* Класичні розв'язки рівняння локальних флуктуацій гравітаційних полів Рісса та їх властивості // Укр.мат.журн. – 2022, 74(1). – С. 61-76. DOI: https://doi.org/10.37863/umzh.v74i1.6879

43. *Літовченко В.А.* Задача Коші з оператором Рісса дробового диференціювання // Укр. мат. журн.– 2005. – **57**, № 12. – С. 1653–1667.

44. *Літовченко В.А.* Системи Шилова у просторах типу S і S' : монографія. -Чернівці : ЧНУ, 2019. – 280 с.

45. *Літовченко В.А.* Гіперболічні системи в просторах Гельфанда і Шилова // Укр. мат. журн. – 2019. – 71(10). – С. 1360–1373.

46. *Літовченко В.А.* Один метод дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічних систем // Укр. мат. журн. - 2018. - 70(6). - С. 801-811.

47. *Літовченко В.А.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для {p,h}-параболічних систем зі змінними коефіцієнтами // Нелінійні коливання. - 2018. - 21(2). - С. 189-196.

48. *Літовченко В.А.* Гладкі розв'язки гіперболічних за Шиловим систем // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фіз.-мат. науки: зб. наук. пр. - Вип. 18. - 2018. - С. 105-112.

49. *Лусте І.П., Пукальський І.Д.* Крайова задача для нерівномірно еліптичних рівнянь зі степеневими особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля, т. 64, № 3. 2021. С. 16-25.

50. *Лусте І.П., Пукальський І.Д.* Загальна крайова задача для нерівномірно параболічних рівнянь зі степеневими особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля, т. 65, № 1. 2022. С. 16-25.

51. *Лусте О.Я.* Фізика вихрових термоелементів і вимірювальних приладів на їх основі: Дисертація на здобуття ступеня доктора фізико-математичних наук. Чернівці, 2003. 271 с.

52. *Лусте О.Я.* Обернені задачі математичної теорії винайдення нових типів термоелементів. Частина II // Термоелектрика, 2002. №1. С. 3-8.

53. *Лусте О.Я., Кузь Р.В.* Комп'ютерне керування вихровими термоелектричними струмами // Термоелектрика, 2004. №2. С. 11-19.

54. *Лусте О. Я., Лусте І.П.* Знаходження функції утворення для термоелектричного поля // Термоелектрика, №5, 2019. — с. 19-23.

55. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. Київ : Інститут математики НАН України, 1999. 176 с.

56. *Мельничук Л.М.* Структура та властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння з операторами Бесселя // Буковинський математичний журнал. 2016. – Т.4, №3-4. - Чернівці, 2016. – С.109 – 112.

57. *Мельничук Л..* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння із зростаючими коефіцієнтами та з операторами Бесселя різних порядків // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17-19 вересня 2018 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2018. – С. 85.

58. *Мельничук Л..* Структура та властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для ультрапараболічного рівняння із зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів та з операторами Бесселя різних порядків // Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування: , 16— 19 вересня 2020 р. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2020. – С. 167-168.

59. *Мельничук Л.М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для параболічного рівняння другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами та з операторами Бесселя різних порядків // Буковинський математичний журнал. **10**, 1 (2022), 93-101.

60. *Лілія Мельничук, Галина Перун* Реалізація методу візуалізації для здобувачів освіти шляхом використання платформи Genially для створення інтерактивного анімованого контенту // Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації: матеріали III Міжнародної наук.-практ. інтернет-конф. (м. Запоріжжя, 30 вересня 2022 р.) — Запоріжжя : ТДАТУ, 2022. — С. 343—348.

61. *Мельничук Л.М.* Методичні особливості дистанційного навчання при вивченні середовища програмування Скретч // Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28 — 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. — Чернівці, 2021. — С. 116—117.

62. *Мельничук Л.М.* Інтерпретована динамічна візуальна мова програмування (Scratch): навч. посібник/ Л.М. Мельничук, В.М. Лучко, Г.М. Перун. - Чернівці: Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. — 128 с.

63. *Нікітіна О.М.* Гібридні інтегральні перетворення типу (Ейлера-Бесселя). Львів, 2008. 86 с. (Препринт. НАН України, Ін-т прикладних проблем математики і механіки ім. Я.С. Підстригача; 01-08).

64. *Перун Г.М., Ясинський В.К.* Стохастическая m - точечная задача Коши для параболического уравнения с полувинеровскими возмущениями // Кибернетика и системный анализ. - 2018. - 54(2). - С. 116 - 123.

65. *Пукальський І.Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженням і особливостями: Чернівці: Рута, 2008. 253 с.

66. *Пукальський І.Д.* Задача Коші для нерівномірно параболічних рівнянь зі степеневими особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля, т. 64, № 2. 2021. С. 31-41.

67. *Пукальський І.Д.* Задача Коші для 2B-параболічного рівняння з довільним степеневим виродженням // Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28 - 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. Чернівці, 2021. С. 139-140.

68. *Пукальський І.Д., Лусте І.П.* Крайові задачі для параболічних рівнянь другого порядку. Чернівці Чернівецький нац. ун-т. ім. Ю. Федьковича, 2021. 284 с.

69. *Пукальський І.Д., Лусте І.П.* Оптимальне керування в багатоточковій крайовій задачі для 2b-параболічних рівнянь // Буковинський математичний журнал. 2021. т. 10, № 1. С. 110−119.

70. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Крайова задача з імпульсною дією для параболічного рівняння з виродженням // Укр. мат. журнал. 2019. т. 71, № 5. С. 645−655.

71. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Одностороння крайова задача з імпульсними умовами для параболічних рівнянь з виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2018. т. 61, № 4. С. 35–48. URL:http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/3123

72. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Багатоточкова крайова задача з нерівностями для параболічних рівнянь з виродженням // Буковинський математичний журнал. 2018. т. 6, № 3-4. С. 118–126. DOI:https://doi.org/10.31861/bmj2018.03.118

73. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Оптимальне керування в нелокальній крайовій задачі з інтегральною умовою для параболічних рівнянь з виродженням //Буковинський математичний журнал. 2019. т. 7, № 1. С. 82–98. DOI:https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.082

74. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Багатоточкова крайова задача оптимального керування для параболічних рівнянь з виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля, т63, № 4. 2020. ст. 17-33.

75. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Одностороння крайова задача для параболічних рівнянь з імпульсною дією і виродженням // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17-19 вересня 2018 р. - Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2018. - С. 94.

76. *Пукальський Іван, Яшан Богдан* Оптималье керування в крайовій задачі для еліптичних рівнянь з виродженням "Прикладна математика та інформаційні технології Матеріали міжнародної конференції, присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, 22-24 вересня 2022 р. - Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2022. - С. 142-143.

77. *Пукальський І., Яшан Б.* Оптимальне керування в нелокальній крайовій задачі з інтегральною умовою для параболічних рівнянь з виродженням "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана (Чернівці, 16-19 вересня 2020 року). - Чернівці, 2020. - С. 183 - 184.

78. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М. : Физико-математическая литература, 2001. 320 с.

79. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

80. *Слободян Ганна, Перун Галина* Мобільні застосунки для вивчення програмування в шкільному освітньому процесі // Матеріали міжнародної конференції «Прикладна математика та інформаційні технології», присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, 22-24 вересня 2022 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2022. – С. 271-272.

81. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008.

82. *У Хоу–Синь* Об определении параболичности систем уравнений в частных производных // Успехи матем. наук. – 1960. – 15(6). – С. 157–161.

83. *Федорюк М.В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения // Дифф. уравн. – 1978. – **14**, № 7. – С. 1296–1301.

84. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М. : Мир, 1968. 427 с.

85. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М. : Наука, 1964. – 443 с.

86. *Эйдельман С.Д., Ивасишен С.Д., Порпер Ф.О.* Теоремы Лиувилля для параболических в смысле Шилова систем // Изв. вузов. Математика. – 1961. – № 6. – С. 169–179.

87. *Яшан Б.О.* Крайова задача Діріхле для параболічного рівняння з імпульсною дією // Буковинський математичний журнал. 2018. т. 6, № 1-2. С. 135−141. DOI:https://doi.org/10.31861/bmj2018.01.135

88. *Яшан Б.О.* Задача з імпульсною дією для параболічних рівнянь з виродженням // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання - 2019": Львів, 27-29 травня 2019р. URL: http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2019

89. *Яшан Б.О.* Багатоточкова задача Коші для параболічних рівнянь з виродженням // Сучасні проблеми механіки та математики: Інститут прикла-

дних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2018. - Т. 3., С. 183-184. URL: www.iapmm.lviv.ua/mpmm2018.

90. *Яшан Б.О.* Оптимальне керування в багатоточковій крайовій задачі Діріхле для параболічних рівнянь з виродженням // Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28 - 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. Чернівці, 2021. С. 176-177.

91. Модельні навчальні програми для 5-6 класів Нової української школи. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/modelni-navchalni-programi-dlya-5-9-klasiv-novoyi-ukrayinskoyi-shkoli-zaprovadzhuyutsya-poetapno-z-2022-roku

92. Навчальні програми для 6-9 класів (Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти, затверджений Наказом № 804 Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017). URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas

93. Офіційний сайт онлайн-сервісу Genially. URL: https://genial.ly/

94. Сайт зі шкільними підручниками. URL: https://pidruchnyk.com.ua/informatyka5

95. Типові освітні програми НУШ для початкових класів, затверджені Наказом № 1272 Міністерства освіти і науки України від 08.10.2019 року. URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-pochatkovoyi-shkoli

96. *Anatychuk L.I.* Thermoelectric materials with programmable inhomogeneity //In Modern science of materials the 21th century. Kyiv, 1998. P. 411-432.

97. *Andy Reynolds* Liberating Lévy walk research from the shackles of optimal foraging // Physics of Life Reviews. – 2015. – **14**. – P. 59–83.

98. *Applebaum D.* Lévy Processes and stochastic calculus. – Cambridge: Cambridge University Press, 2009. https://doi.org/10.1017/CBO9780511809781

99. *Bertoin J.* Lévy Processes, volume 121 of Cambridge Tracts in Mathematics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

100. *Bucur C., Valdinoci E.* Non-local diffusion and applications // Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana 20, Springer, 2016. DOI: 10.1007/978-3-319-28739-3

101. *Chandrasekhar S.* Stohastic problems in physics and astronomy // Reviews of modern Physics. – 1943. – **15**, No. 1. – P. 1–89.

102. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differentsal and pseudo-differentsal equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 200 4. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152).

103. *Holtsmark J.* Über die Verbreiterung von Spektrallinier // Annalen der Physik. –1919. – **58**. – S. 577–630.

104. *M.-I. Huang, R.-H. Yen, A.-B. Wang* The influence of the Thomson effect on the performance of a thermoelectric cooler // International Journal of Heat and Mass Transfer, 48(2005). Pp. 413-418.

105. Classical fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. I / *S.D. Ivasyshen, I.P. Medynsky* // J. Math. Sci. – 2020. – **246**, №2. – P. 121–151.

106. *Jacob N.* Pseudo differential operators and Markov Processes. In 3 vol. – London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005.

107. *Litovchenko V.A.* Localization principle for a solution of one evolutionary-parabolic problem with a positive genus // Modern scientific researches. – 2021, 18(1). – P. 99-105. https://www.modscires.pro/index.php/msr/issue/view/msr18-01

108. *Litovchenko V.A.* Pseudodifferential Local Interaction Equation for Moving Objects // Differential Equations. – 2022, 58(1). - P.44-52. doi: 10.1134/s0012266122010062

109. *Litovchenko V.A.* The Cauchy problem and distribution of local fluctuations of one Riesz gravitational field // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2022, 25(2). – P. 668-686. https://doi.org/10.1007/s13540-022-00034-2

110. *Litovchenko V.A.* Classical Solutions of the Equation of Local Fluctuations of Riesz Gravitational Fields and their Properties // Ukrainian Mathematical Journal, 2022, 74(1), p. 69-86. https://doi.org/10.1007/s11253-022-02048-8

111. *Lévy P.* Calcul des probabilities. – Paris: Gauthier–Villars et Cie, 1925.

112. *Luste I.P.* System of boundary problems of thermoelectricity and thermoelasticity //Journal of computational and applied mathematics Supplement 336, 2018. — p. 57-82.

113. *I.P. Luste* Inverse space-dependent source problem for a time-fractional diffusion equation by an adjoint problem approach // Journal of Thermoelectrcity, 2020, №5, p. 17—33.

114. *Perun G.M., Yasinsky V.K.* Stochastic m-Point Cauchy Problem for Parabolic Equation with Semi-Wiener Perturbations //Ciber. and Syst. An. - 2018. - 54(2). - 278-283.

115. *Petrowsky I.* Uber das Cauchysche Problem fur System von partiellen Differentialgleichungen // Math. Sbornik. – 1937. – 2(44). – P. 815–870.

116. *Pukal'skii I.D., Yashan B.O.* The Cauchy problem with impulse action and degeneration for parabolic equations // Mat. Stud. 2019. Vol. 52, No. 1. P. 63−70. DOI:doi:10.30970/ms.52.1.63-70

117. *Pukal'skii I.D., Yashan B.O.* The Cauchy problem for parabolic equations with degeneration // Advances in Mathematical Physics. 2020. Vol. 2020, Article ID 1245143, 7 pages. DOI: https://doi.org/10.1155/2020/1245143.

118. *Pukal's'kyi I.D., Yashan B.O.* Nonlocal multipoint (in time) problem for parabolic equations with degeneration // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 243, No. 11. P. 34−44. DOI:https://doi.org/10.1007/s10958-019-04523-3

119. *I.D. Pukal's'kyi, B.O. Yashan* Nonlocal Multipoint (in Time) Problem with oblique derivative for a parabolic equation with degeneration // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 247, P. 43−57. DOI:https://doi.org/10.1007/s10958-020-04788-z

120. *Pukal'skii I.D., Yashan B.O.* Nonlocal multi-point in time Cauchy problem for parabolic equations with degeneration // Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences. 2020. Vol. 233, No. VIII(28). P. 41−45. DOI: https://doi.org/10.31174/SEND-NT2020-233VIII28-09.

121. *I.D. Pukal's'kyi, B.O. Yashan* One-Sided Boundary-Value Problem with Impulsive Conditions for Parabolic Equations with Degeneration // Journal of Mathematical Sciences, 2021, vol 256, P 398-415 DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-021-05434-y

122. *Pukalskyi I.D., Yashan B.O.* Boundary-value problem with impulsive action for a parabolic equation with degeneration // Ukrainian Mathematical Journal. 2019. Vol. 71, No. 5. P. 735−748. DOI:https://doi.org/10.1007/s11253-019-01674-z

123. *Riesz M.* Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green // C. R. Congrès Intern. Math. Oslo. – 1936. – **2**. – P. 62-63.

124. *Samoilenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive Differential Equations. Singapore: Word Scientific, 1995. 462 p.

125. *Sobel'man I.I.* An Introduction to the Theory of Atomic Spectra. – In: International Series in Natural Philosophy, Vol. 40, 1972. https://doi.org/10.1016/C2013-0-02394-8

126. *Schneider W.R.* Stable distributions: Fox function representation and generalization // Lecture Notes Phus. – 1986. – V. 262. – P. 497–511.

127. *Schwartz L.* Theorie des distributions. **1**. – Paris : Hermann, 1951. – 169 p.

128. *G.M. Viswanathan, V. Afanasyev, Sergey V. Buldyrev, Shlomo Havlin, M.G.E. da Luz, E.P. Raposo, H.Eugene Stanley* Lévy flights in random searches // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2000. – **282**, No. 1-2. – P. 1–12. https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00071-6

ДОДАТОК А

Список публікацій виконавців НДР за 2018-2022 роки

Монографії

1. *Літовченко В.А.* Системи Шилова у просторах типу S і S' : монографія. -Чернівці : ЧНУ, 2019. – 280 с.

2. *Litovchenko V.A.* Peculiarities of the Fundamental Solution of Parabolic Systems with a Negative Genus // Advances in the Solution of Nonlinear Differential Equations: IntelOpen-London, 2021. (Chapter of the monograph)

Наукові статті у фахових виданнях

1. *Litovchenko V.A.* One Method for the Investigation of Fundamental Solution of the Cauchy Problem for Parabolic Systems // Ukr. Mat. Zh. - 2018. - 70 (6). - 801-811.

2. *Litovchenko V.A.* Fundamental solution of the Cauchy problem for $\{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{h}\}$-parabolic systems with variable coefficients // J. Math. Sci. - 2019. - 243(2). - 130-137.

3. *Litovchenko V.A., Unguryan G.M.* Conjugate Cauchy Problem for Parabolic Shilov Type Systems with Nonnegative Genus // Diff.Eq.-2018.-54(3).-1-17.

4. *Litovchenko V.A., Unguryan G.M.* Some properties of Green's functions of Shilov-type parabolic systems // Miskolc Math. N. - 2019. - 20 (1). - 365-379.

5. *Litovchenko V.A.* Hyperbolic Systems in Gelfand and Shilov Spaces // Ukrainian Mathematical Journal, 2020, 71(10), c. 1555-1571.

6. *Litovchenko V.A.* Localization principle for a solution of one evolutionary-parabolic problem with a positive genus // Modern Scientific Researches. – 2021, 18(1). – P. 99-105.

7. *Litovchenko V.A.* Holtsmark Fluctuations of Nonstationary Gravitational Fields // Ukrainian Mathematical Journal, 2021, 73(1), p. 76–84.

8. *Litovchenko V.A.* Localization Property for Regular Solutions of the Cauchy Problem for a Fractal Equation of the Integral Form // Journal of Mathematical Sciences (United States), 2021, 253(1). - P. 1-14.

9. *Litovchenko V.A.* Pseudodifferential Equation of Fluctuations of Nonstationary Gravitational Fields // Journal of Mathematics, 2021, 2021, 8 pages 6629780.

10. *Litovchenko V.A.* Pseudodifferential Local Interaction Equation for Moving Objects // Differential Equations. – 2022, 58(1). - P.44-52.

11. *Litovchenko V.A.* The Cauchy problem and distribution of local fluctuations of one Riesz gravitational field // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2022, 25(2). – P. 668-686.

12. *Litovchenko V.A.* Classical Solutions of the Equation of Local Fluctuations of Riesz Gravitational Fields and their Properties // Ukrainian Mathematical Journal, 2022, 74(1), p. 69-86.

13. *Luste I.P.* System of boundary problems of thermoelectricity and thermoelasticity //Journal of computational and applied mathematics Supplement 336, 2018. — p. 57-82.

14. *Luste I.P.* Inverse space-dependent source problem for a time-fractional diffusion equation by an adjoint problem approach // Journal of Thermoelectrcity, 2020, №5, p. 17 — 33.

15. *Perun G.M., Yasinsky V.K.* Stochastic m-Point Cauchy Problem for Parabolic Equation with Semi-Wiener Perturbations // Ciber. and Syst. An. - 2018. - 54(2). - 278-283.

16. *Pukal'skii I.D., Yashan B.O.* The Cauchy problem with impulse action and degeneration for parabolic equations // Mat. Stud. 2019. Vol. 52, No. 1. P. 63−70.

17. *Pukal'skii I.D., Yashan B.O.* The Cauchy problem for parabolic equations with degeneration // Advances in Mathematical Physics. 2020. Vol. 2020, Article ID 1245143, 7 pages.

18. *Pukal's'kyi I.D., Yashan B.O.* Nonlocal multipoint (in time) problem for parabolic equations with degeneration // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 243, No. 11. P. 34−44.

19. *I.D. Pukal's'kyi, B.O. Yashan* Nonlocal Multipoint (in Time) Problem with oblique derivative for a parabolic equation with degeneration // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 247, P. 43−57.

20. *Pukal'skii I.D., Yashan B.O.* Nonlocal multi-point in time Cauchy problem for parabolic equations with degeneration // Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences. 2020. Vol. 233, No. VIII(28). P. 41—45.

21. *I.D. Pukal's'kyi, B.O. Yashan* One-Sided Boundary-Value Problem with Impulsive Conditions for Parabolic Equations with Degeneration // Journal of Mathematical Sciences, 2021, vol 256, P 398-415.

22. *Pukalskyi I.D., Yashan B.O.* Boundary-value problem with impulsive action for a parabolic equation with degeneration // Ukrainian Mathematical Journal. 2019. Vol. 71, No. 5. P. 735—748.

23. *Житарюк І.В., Лучко В.М., Лучко В.С.* Міжпредметні зв'язки при розв'язуванні задач алгебри з використанням геометрії // Pedagogy and Psychology : VI(66), Issue 162 - 2018. – P. 66-69.

24. *Житарюк І.В., Лучко В.М., Лучко В.С.* Методичні особливості розв'язування задач з математики підвищеної складності з використанням властивостей і графіків елементарних функцій // Pedagogy and Psychology : VI(74), Issue 180 - 2018. – P. 70-73.

25. *Житарюк І.В., Лучко В.М., Блажевський С.Г.* Математичне моделювання і задачі-моделі в контексті використання сучасних інноваційних комп'ютерних технологій // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, VII (83), Issue: 203, 2019. С. 55-57.

26. *Житарюк І.В., Лучко В.М., Лучко В.С.* Методичні особливості розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами з використанням властивостей і графіків елементарних функцій // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, VII (80), Issue: 198, 2019. С. 52-54.

27. *Ісарюк І. М., Пукальський І. Д.* Внутрішнє і стартове керування розв'язками крайової задачі для параболічних рівнянь з виродженнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля, т. 63, №2. 2020. С. 17-28.

28. *Ленюк О.М., Нікітіна О.М., Шинкарик М.І.* Моделювання динамічних процесів методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Ейлера на полярній осі // Вісник ХНТУ. Вип. №2(69). - Херсон: ХНТУ, 2019. - С. 140-144.

29. *Литовченко В.А.* Псевдодифференциальное уравнение локального влияния движущихся обьектов // Дифф. уравн. – 2022, 58(1). – С.45-51.

30. *Літовченко В.А.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для {p,h}-параболічних систем зі змінними коефіцієнтами // Нелінійні коливання. - 2018. - 21(2). - С. 189-196.

31. *Літовченко В.А.* Один метод дослідження фундаментального розв'язку задачі Коші для параболічних систем // Укр. мат. журн. - 2018. - 70(6). - С. 801-811.

32. *Літовченко В.А.* Властивість локалізації регулярних розв'язків задачі Коші для фрактального рівняння інтегрального вигляду // Мат. методи та фіз. мех. поля. - 2018. - 61(2). - С. 7-17.

33. *Літовченко В.А.* Гладкі розв'язки гіперболічних за Шиловим систем // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фіз.-мат. науки: зб. наук. пр. / І-т кіберн. ім. В.М. Глушкова НАНУ, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка. - Вип. 18. - 2018. - С. 105-112.

34. *Літовченко В.А.* Про параболічні за Шиловим системи із змінними коефіцієнтами. - С-ні пробл. мех. та матем.: зб. наук. пр. у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра // ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ. - 2018. - Т. 3., С. 137-138.

35. *Литовченко В.А., Унгурян Г.М.* Сопряженная задача Коши для параболических типа Шилова систем с неотрицательным родом // Дифф. уравн. - 2018. - 54(3). - С. 341-357.

36. *Літовченко В.А.* Гіперболічні системи у просторах Гельфанда і Шилова // Укр. мат. журн. - 2019. - 71 (10). - С. 1360-1373.

37. *Літовченко В.А.* Принцип максимуму для рівняння локальних флуктуацій гравітаційних полів Рісса суто дробового порядку // Бук. мат. журн. 9 (2) (Груд 2021).

38. *Літовченко В.А.* Класичні розв'язки рівняння локальних флуктуацій гравітаційних полів Рісса та їх властивості // Укр.мат.журн. – 2022, 74(1). – С. 61-76.

39. *Літовченко В.А.* Методологічні аспекти організації педагогічної практики магістрантів спеціальності 014.09-СО Інформатика // Scientific World Journal. - 2022, N 15-02. – С. 66–70.

40. *Лусте І.П., Пукальський І.Д.* Крайова задача для нерівномірно еліптичних рівнянь зі степеневими особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля, т. 64, № 3. 2021. С. 16-25.

41. *Лусте І.П., Пукальський І.Д.* Загальна крайова задача для нерівномірно параболічних рівнянь зі степеневими особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля, т. 65, № 1. 2022. С. 16-25.

42. *Лусте О.Я., Лусте І.П.* Знаходження функції утворення для термоелектричного поля // Термоелектрика, №5, 2019. — с. 19-23.

43. *Мельничук Л.М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для параболічного рівняння другого порядку зі зростаючими коефіцієнтами та з операторами Бесселя різних порядків // Буковинський математичний журнал. **10**, 1 (2022), 93-101.

44. *Перун Г.М., Ясинський В.К.* Стохастическая m-точечная задача Коши для параболического уравнения с полувинеровскими возмущениями // Кибернетика и системный анализ. - 2018. - 54(2). - С. 116 - 123.

45. *Пукальський І.Д.* Задача Коші для нерівномірно параболічних рівнянь зі степеневими особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля, т. 64, № 2. 2021. С. 31-41.

46. *Пукальський І.Д., Лусте І.П.* Оптимальне керування в багатоточковій крайовій задачі для 2b-параболічних рівнянь // Буковинський математичний журнал. 2021. т. 10, № 1. С. 110−119.

47. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Крайова задача з імпульсною дією для параболічного рівняння з виродженням // Укр. мат. журнал. 2019. т. 71, № 5. С. 645−655.

48. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Одностороння крайова задача з імпульсними умовами для параболічних рівнянь з виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2018. т. 61, № 4. С. 35−48.

49. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Багатоточкова крайова задача з нерівностями для параболічних рівнянь з виродженням // Буковинський математичний журнал. 2018. т. 6, № 3-4. С. 118−126.

50. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Оптимальне керування в нелокальній крайовій задачі з інтегральною умовою для параболічних рівнянь з виродженням //Буковинський математичний журнал. 2019. т. 7, № 1. С. 82−98.

51. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Багатоточкова крайова задача оптимального керування для параболічних рівнянь з виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля, т63, № 4. 2020. ст. 17-33.

52. *Яшан Б.О.* Крайові задачі з імпульсними умовами для параболічних рівнянь з виродженням // Дис. ... д-ра філософ.: 111. - Чернівці, 2020. - 155 с.

53. *Яшан Б.О.* Крайова задача Діріхле для параболічного рівняння з імпульсною дією // Буковинський математичний журнал. 2018. т. 6, № 1-2. С. 135−141.

54. *Яшан Б.О.* Багатоточкова задача Коші для параболічних рівнянь з виродженням. - С-ні пробл. мех. та матем.: зб. наук. пр. у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра // ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ. - 2018. - Т. 3., С. 183-184.

Матеріали наукових конференцій

1. *V. Litovchenko, A. Shkolyarenko* On one problem of the interaction of moving objects // Thesis of XI International Skorobohatko mathematical conference (October 26 – 30, Lviv, Ukraine). – 2020. – P. 62.

2. *Litovchenko V.* On the fundamental solution of the Cauchy problem for equations with negative genus and dissipative parabolicity // The 29 Conference on Applied and Industrial Mathematics, dedicated to the Memory of Academician Mitrofan M. Choban, August, 25-27, 2022: Book of Abstracts. – Chisinau: S. n., 2022. – p.37-38. (Republic of Moldova)

3. *Perun H.M., Yasinsky V.K.* A method of iterations of Cauchy problem solution for a stochastic parabolic equation with delay // International conference modern stochastics:theory and applications V (June 1–4, 2021, Kyiv, ukraine). - Kyiv, 2001 — S.27-28.

4. *С.Г. Блажевський, О.М. Ленюк, О.М. Нікітіна, М.І. Шинкарик* Моделювання процесів динаміки методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя — Ейлера — Бесселя на полярній осі // XXI Міжнародна конференція з математичного моделювання (МКММ-2020) [Збірка тез (14-18 вересня 2020р. м. Херсон)]. – Херсон: ХНТУ, 2020– С. 41.

5. *Блажевський С.Г., Ленюк О.М., Нікітіна О.М., Шинкарик М.І.* Моделювання динамічних процесів методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Ейлера-Бесселя на полярній осі // Прикладні питання математичного моделювання. Т.3, №2.1. - Херсон: ХНТУ, 2020. - С. 18-26.

6. *Блажевський С.Г., Ленюк О.М., Нікітіна О.М., Шинкарик М.І.* Моделювання динамічних процесів методом гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера-Бесселя на сегменті // Прикладні питання математичного моделювання. Т.4, № 2.1. - Херсон: ХНТУ, 2021. - С. 25-31.

7. *Блажевський С.Г., Ленюк О.М., Нікітіна О.М., Шинкарик М.І.* Моделювання процесів динаміки методом гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера-Бесселя на сегменті // XXII Міжнародна конференція з математичного моделювання (МКММ-2021) [Збірка тез (13-17 вересня 2021 р., м. Херсон)]. – Херсон: ХНТУ, 2021. – С. 18.

8. *Житарюк І.В., Лучко В.М., Лучко В.С.* Міжпредметні зв'язки математики та інформатики при розв'язуванні олімпіадних задач. Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28 - 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. Чернівці, 2021. С. 73.

9. *Ленюк О.* Розв'язування задач математичної фізики методом гібридних інтегральних перетворень Бесселя-Ейлера-Бесселя на полярній осі // "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування" - Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана (Чернівці, 16–19 вересня 2020 року). - Чернівці, 2020. - С. 147 — 148.

10. *Ленюк Ю.В., Ленюк О.М.* Підвищення математичної грамотності здобувачів освіти. Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28 - 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. Чернівці, 2021. С. 105-106.

11. *Ленюк О.М., Нікітіна О.М., Шинкарик М.І.* Моделювання процесів динаміки методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя — Ейлера на полярній осі // XIX Міжнародна конференція з математичного моделювання (МКММ-2019) [Збірка тез (16-20 вересня 2019 р., м.

Херсон)]. – Херсон: ХНТУ, 2019. – С. 67.

12. *Літовченко В.А.* Про гравітаційні поля Ріса та псевдодиференціальне рівняння їх локальних завихрень. Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28 - 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. Чернівці, 2021. С. 107-108.

13. *Літовченко В.А.* Функція Гріна задачі Коші для параболічних рівнянь з від'ємним родом і змінними коефіцієнтами // Матеріали міжнародної конференції «Прикладна математика та інформаційні технології», присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, 22-24 вересня 2022 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2022. – С. 135-137.

14. *Літовченко В.А.* Специфіка проведення педагогічної практики магістрантів спеціальності 014.09-СО(Інформатика) // «Світ наукових досліджень. Випуск 12»: матеріали Міжнародної мультидисциплінарної наукової інтернет-конференції, (м. Тернопіль, Україна – м. Переворськ, Польща, 29-30 вересня 2022 р.) / [редкол. : О. Патряк та ін.] ; ГО "Наукова спільнота"; WSSG w Przeworsku. – Тернопіль: ФО-П Шпак В.Б. – с. 143-144.

15. *Лусте І.П.* Емельян Ігнатєв: маловідомі факти біографії. Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28 - 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. Чернівці, 2021. С. 111.

16. *Мельничук Л..* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для ультрапараболічного рівняння із зростаючими коефіцієнтами та з операторами Бесселя різних порядків // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17-19 вересня 2018 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2018. – С. 85.

17. *Мельничук Л.* Структура та властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для ультрапараболічного рівняння із зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів та з операторами Бесселя різних поряд-

ків // “Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування” - Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана (Чернівці, 16–19 вересня 2020 року). - Чернівці, 2020. - С. 167 — 168.

18. *Мельничук Л.*. Структура та властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для ультрапараболічного рівняння із зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів та з операторами Бесселя різних порядків // Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування: 16—19 вересня 2020 р. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2020. – С. 167-168.

19. *Лілія Мельничук, Галина Перун* Реалізація методу візуалізації для здобувачів освіти шляхом використання платформи Genially для створення інтерактивного анімованого контенту // Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації: матеріали III Міжнародної наук.-практ. інтернет-конф. (м. Запоріжжя, 30 вересня 2022 р.) — Запоріжжя : ТДАТУ, 2022. — С. 343—348.

20. *Мельничук Л.М.* Методичні особливості дистанційного навчання при вивченні середовища програмування Скретч // Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28 — 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. — Чернівці, 2021. — С. 116—117.

21. *Г. Перун, В. Ясинський* Неперервно збурена задача Коші для параболічного рівняння з запізненням // “Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування” - Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана (Чернівці, 16–19 вересня 2020 року). - Чернівці, 2020. - С. 181 — 182.

22. *Перун Г.М., Ясинський В.К.* Оцінка розв'язку задачі Коші для стохастичного параболічного рівняння з запізненням. Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28 - 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. Чернівці, 2021. С. 127-128.

23. *Пукальський І.Д.* Задача Коші для 2B-параболічного рівняння з довільним степеневим виродженням // Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня

народження Михайла Павловича Ленюка, 28 - 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. Чернівці, 2021. С. 139-140.

24. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Одностороння крайова задача для параболічних рівнянь з імпульсною дією і виродженням // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17-19 вересня 2018 р. - Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2018. - С. 94.

25. *Пукальський Іван, Яшан Богдан* Оптимальe керування в крайовій задачі для еліптичних рівнянь з виродженням "Прикладна математика та інформаційні технології Матеріали міжнародної конференції, присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, 22-24 вересня 2022 р. - Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2022. - С. 142-143.

26. *Пукальський І., Яшан Б.* Оптимальне керування в нелокальній крайовій задачі з інтегральною умовою для параболічних рівнянь з виродженням "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана (Чернівці, 16-19 вересня 2020 року). - Чернівці, 2020. - С. 183 - 184.

27. *Яшан Б.О.* Задача з імпульсною дією для параболічних рівнянь з виродженням // Конференція молодих учених "Підстригачівські читання - 2019": Львів, 27-29 травня 2019р.

28. *Яшан Б.О.* Оптимальне керування в багатоточковій крайовій задачі Діріхле для параболічних рівнянь з виродженням // Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28 - 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. Чернівці, 2021. С. 176-177.

Навчально-методичні видання

1. *Блажевський С.Г., Ленюк О.М.* Диференціальні рівняння та елементи математичної фізики: навч.-метод. Посібник — Чернівці: Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. - 248 с.

2. *Гусак О.М., Лусте І.П.* Інформатика та системологія: навч. посіб. Чернівці : Чернівец. нац. унів. ім.Ю.Федьковича, 2022. 176 с.

3. *С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан, Л.М. Мельничук* Рівняння математичної фізики: основні методи, приклади, задачі: навчальний посібник. - Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, вид-во "Політехніка", 2018. - 212 с.

4. *Ленюк О.М., Ленюк Ю.В.* Короткий довідник з математики для підготовки до ЗНО та ДПА : Навчально-практичний посібник. 2-е вид., випр. і доп. – Чернівці, 2021. – 20 с.

5. *Матійчук М.І., Лучко В.М.* Ефективність проектної діяльності у розвитку учнів на уроках інформатики. Чернівці, 2018. – 104 с.

6. *М.І. Матійчук, Г.М. Перун* Загальні параболічні крайові задачі: науково-методичний посібник. - Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2018. - 120 с.

7. *Мельничук Л.М., Лучко В.М., Перун Г.М.* Інтерпретована динамічна візуальна мова програмування (Scratch) : навч. посібник – Чернівці : Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. - 128 с.

8. *І.Д. Пукальський, І.П. Лусте* Конспект лекцій та практикум з вищої математики: навчальний посібник. - Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2018. - 480 с.

9. *І.Д. Пукальський, І.П. Лусте* Конспект лекцій та практикум з вищої математики: навчальний посібник. - Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2019. - 480 с.

10. *І.Д. Пукальський, І.П. Лусте* Теорія ймовірностей та математична статистика: теорія та практик: вибрані розділи: навч.-метод. посібник. - Чернівці: Чернівецький нац. Ун-т ім. Ю. Федьковича, 2019. - 232 с.

11. *Пукальський І.Д., Лусте І.П.* Крайові задачі для параболічних рівнянь другого порядку: навч. посібник – Чернівці : Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. 284 с. ISBN 978-966-423-632-1

12. *Пукальський І.Д., Лусте І.П., Яшан Б.О.* Вища математика для економістів (опорний конспект лекцій та практикум): навчальний посібник – Чернівці: Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2022. 421 с.